Abschlussprüfungsaufgabe 2001 Technik Analysis A2 Angabe

1 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := x^3 \cdot e^{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für x -> + ∞, und für x -> - ∞, und geben Sie Lage und Art der Nullstelle der Funktion f an.

1.2 Bestimmen Sie für die Funktion f die maximalen Monotonieintervalle, und geben Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes des Graphen der Funktion f an.

1.3 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung nur der bisher vorliegenden Ergebnisse den prinzipiellen Verlauf des Graphen von f. Geben Sie sodann die Anzahl der Lösungen der Gleichung f(x) = a in Abhängigkeit von a $\in \mathbb{R}$ an.

1.4 Emitteln Sie die Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe 1.3 für a = -2 mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf zwei Nachkommastellen gerundet. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch, benutzen Sie als Startwert x0 = -1

2 Gegeben sind die reellen Funktionen $g(x,k) := \dfrac{2 \cdot x}{x^2 + k}$ mit k $\in \mathbb{R}$ in der von k abhängigen, größtmöglichen Definitionsmenge $D_{gk} \subseteq \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D_{gk} in Abhängigkeit von k an.

2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $g(x,k)$ auf Symmetrie, und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $g(x,k)$ für $|x| \to \infty$.

2.3 Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung diejenigen Werte von k $\in \mathbb{R}$, für die die zugehörige Funktion g_k relative Extrema besitzt. Geben Sie für diesen Fall auch die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte an.

2.4 Zeichnen sie den Graphen der Funktion g_1 (für k=1) und g_e (für k=e) in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-1 \le x \le 5$. Verwenden Sie für die Zeichnung alle bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle für ganzzahlige x-Werte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.

2.5 Gegeben sind nun die Funktionen $G(k,x) := \ln\left(x^2 + k\right)$ mit k $\in \mathbb{R}$, $k > 0$ und x $\in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Funktion G_k eine Stammfunktion der entsprechenden Funktion g_k aus 2.0 ist, berechnen Sie den Integralwert $I = \int_0^2 (g(1,x) - g(e,x))\,dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

3 Bei einer bestimmten gedämpften Schwingung kann mathematisch idialisiert und ohne Verwendung von Einheiten die Auslenkung s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für $t \ge 0$ durch den folgenden Term beschrieben werden:

$$s(t) := 2 \cdot e^{-t} \cdot (\cos(5 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(5 \cdot t))$$

3.1 Bilden Sie die erste Ableitung von s(t) nach der Zeit t und begründen Sie, dass die Extremalpunkte der Auslenkung s(t) jeweils auf einem der Graphen der Funktionen $y(t) := 2 \cdot e^{-t}$ oder $y(t) := -2 \cdot e^{-t}$ liegen.

Zur Kontrolle: $\dfrac{d}{dt}s(t) = -10.4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5 \cdot t)$

3.2 Zeigen Sie, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Maxima der Auslenkung konstant $\Delta t := 0.4 \cdot \pi$ beträgt. Berechnen Sie, auf wie viel Prozent die Auslenkung von einem beliebigen Maximum zum nächsten Maximum abnimmt.