Abschlussprüfungsaufgabe 2001 Technik Analysis A2 Lösungen

1 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := x^3 \cdot e^{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für x -> + ∞, und für x -> - ∞, und geben Sie Lage und Art der Nullstelle der Funktion f an.

Grenzverhalten:

x -->+ ∞ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \infty$, weil e^x für große Werte x stärker wächst als eine Potenzfunktion x^n mit n>0.

x -->- ∞ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^x} \to -\infty$, weil e^x für große negative Werte x gegen Null geht.

Nullstellen:

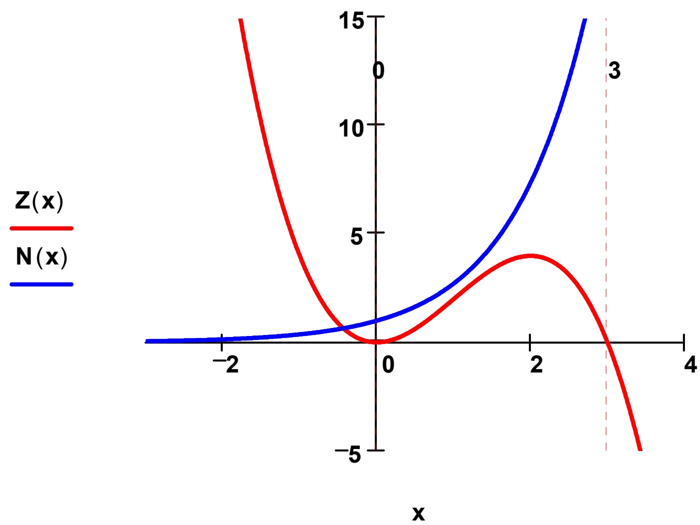
$f(x) := \frac{x^3}{e^x}$ $\quad x^3 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x = 0 ist eine dreifache Nullstelle der Funktion f, (0;0) ist ein Terrassenpunkt.

1.2 Bestimmen Sie für die Funktion f die maximalen Monotonieintervalle, und geben Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes des Graphen der Funktion f an.

$$f(x) := \frac{x^3}{e^x} \qquad \frac{d}{dx}f(x) = \frac{3 \cdot x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot \left(3 \cdot x^2 - x^3\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-x^2 \cdot (x-3)}{e^x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$Z(x) := -x^2 \cdot (x-3)$ $\quad N(x) := e^x$ $\quad$ **Vorzeichenuntersuchung von** $f'(x) := \frac{Z(x)}{N(x)}$



Zähler: + + -

Nenner: + + +

smost smost smofa

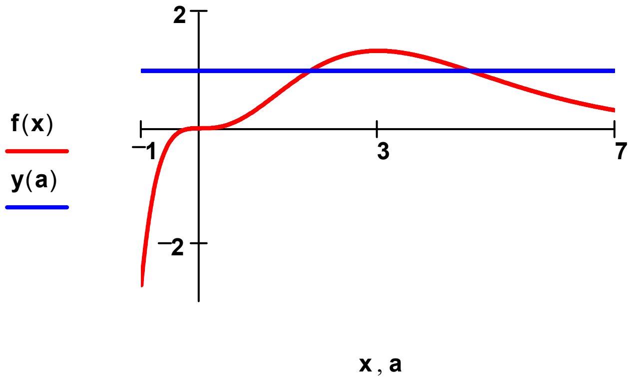
Daraus folgt: Der Graph von
f(x) ist streng monoton steigend für $-\infty < x \le 3$
f(x) ist streng monoton fallend für $3 \le x < \infty$
Der Graph f(x) besitzt bei x = 3 ein absolutes Maximum.

absoluter Maximalpunkt:

$f(3) \rightarrow \frac{27}{\exp(3)}$ $\qquad f(3) = 1.344$ $\qquad$ --> Max(3 / 1,344)

1.3 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung nur der bisher vorliegenden Ergebnisse den prinzipiellen Verlauf des Graphen von f. Geben Sie sodann die Anzahl der Lösungen der Gleichung f(x) = a in Abhängigkeit von a $\in$ IR an.

$y(a) := 1$



Die Lösung der Gleichung f(x) = a lassen sich als Schnittpunkte des Graphen f(x) mit der waagrechten Gerade y(a)=a interpretieren (siehe Zeichnung).

Für $a \le 0$ existiert genau eine Lösung.
Für $0 < a < 1.344$ existieren genau zwei Lösungen.
Für $a = 1.344$ existiert ganau eine Lösung.
Für $a > 1.344$ existiert keine Lösung.

1.4 Emitteln Sie die Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe 1.3 für a = -2 mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf zwei Nachkommastellen gerundet. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch, benutzen Sie als Startwert x0 = -1

Ist x_i ein Näherungswert für die Nullstelle $f(x)$, so ist x_{i+1} ein neuer, im allgemeinen besserer Näherungswert.

Funktion: $f(x) := x^3 \cdot e^{-x} + 2$

Startwert: $x_0 := -1$

Maximale Anzahl der Newtonschritte: $n := 2$

Berechnung der Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot \exp(-x) - x^3 \cdot \exp(-x)$

Berechnung der Näherungen: $i := 0 .. n-1 \qquad x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$x_{i+1} =$

-0.934
-0.926

$\Rightarrow$ Für die Lösung der Gleichung f(x) = -2 gilt: $x = -0.93$

2 Gegeben sind die reellen Funktionen $g(x,k) := \frac{2 \cdot x}{x^2 + k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der von k abhängigen größtmöglichen Definitionsmenge $D_{gk} \subseteq \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D_{gk} in Abhängigkeit von k an. Definitionsmenge: $x := x$

$$x^2 + k = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{bmatrix} (-k)^{\frac{1}{2}} \\ -(-k)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x1 = \sqrt{-k} \\ x2 = -\sqrt{-k} \end{array}$$

Daraus folgt: für $k = 0$ gilt: $D_{g0} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für $k > 0$ gilt: $D_{gk} = \mathbb{R}$

für $k < 0$ gilt: $D_{gk} = \mathbb{R} \setminus \{+-\sqrt{-k}\}$

2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $g(x,k)$ auf Symmetrie, und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $g(x,k)$ für $|x| \rightarrow \infty$.

$$gk(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{(-x)^2 + k} = \frac{-2 \cdot x}{x^2 + k} = -gk(x)$$

Daraus folgt: Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

x -->+ ∞ $\lim_{x \to \infty} g(x,k) \rightarrow 0$

x -->- ∞ $\lim_{x \to -\infty} g(x,k) \rightarrow 0$

Echt gebrochenrationale F.

2.3 Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung diejenigen Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die die zugehörige Funktion g_k relative Extrema besitzt. Geben Sie für diesen Fall auch die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte an.

$$g(x,k) := \frac{2 \cdot x}{x^2 + k} \qquad \frac{d}{dx} g(x,k) = \frac{2 \cdot \left(x^2 + k\right) - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + k\right)^2} = \frac{-2 \cdot x^2 + 2 \cdot k}{\left(x^2 + k\right)^2} = 2 \cdot \frac{-x^2 + k}{\left(x^2 + k\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx} g(x,k) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} \\ -k^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x1 = \sqrt{k} \\ x2 = -\sqrt{k} \end{array}$$

Daraus folgt:

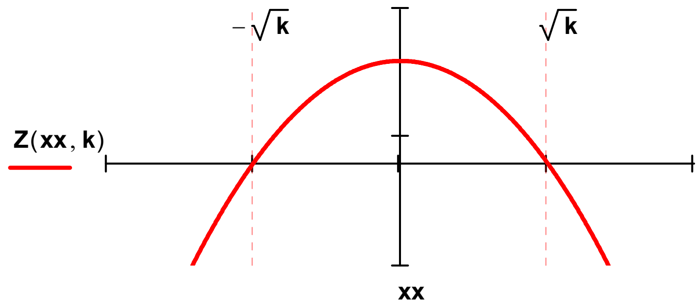
für $k < 0$ gibt es keinen Extrempunkt.

für $k = 0$ ist $x = 0 \notin D_{g0}$. Es gibt keinen Extrempunkt.

für $k > 0 \Rightarrow$ Vorzeichenuntersuchung von $\frac{d}{dx} g(x,k) = 2 \cdot \frac{-x^2 + k}{\left(x^2 + k\right)^2}$

Das Vorzeichen von $\frac{d}{dx} g(x,k)$ wird nur durch den Zähler $Z(x,k) := -2x^2 + 2k$ bestimmt, $\left(x^2 + k\right)^2 > 0$ für $k > 0$ weil es im Quadrat steht.

$k := 25$



Zähler: - + + -

Nenner: + + + +

smofa smost smofa

Der Graph von g(x) $\Rightarrow$g(x,k) ist streng monoton fallend für $-\infty < x \le -\sqrt{k}$ und $\sqrt{k} \le x < \infty$

$\Rightarrow$g(x,k) ist streng monoton steigend für $-\sqrt{k} \le x \le \sqrt{k}$.

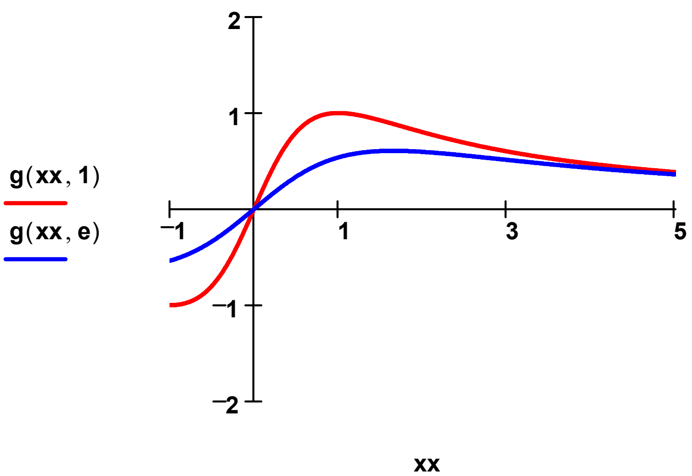
$\Rightarrow$ Minimum bei x = $-\sqrt{k}$ und Maximum bei x = $\sqrt{k}$.

Minimalpunkt: $$gk(-\sqrt{k}) = \frac{2\cdot(-\sqrt{k})}{(-\sqrt{k})^2 + k} = \frac{2\cdot(-\sqrt{k})}{2\cdot k} = \frac{-\sqrt{k}}{k} \quad \Rightarrow \quad Min\left(-\sqrt{k}, \frac{-\sqrt{k}}{k}\right)$$

Maximalpunkt: $$gk(\sqrt{k}) = \frac{2\cdot(\sqrt{k})}{(\sqrt{k})^2 + k} = \frac{2\cdot(\sqrt{k})}{2\cdot k} = \frac{\sqrt{k}}{k} \Rightarrow Max\left(\sqrt{k}, \frac{\sqrt{k}}{k}\right)$$

2.4 Zeichnen sie den Graphen der Funktion g_1 (für k=1) und g_e (für k=e) in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-1 \le x \le 5$. Verwenden Sie für die Zeichnung alle bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle für ganzzahlige x-Werte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.

$$g(x,k) := \frac{2\cdot x}{x^2 + k}$$



$x := -1, 0 .. 5$

$x =$	$g(x,1) =$	$g(x,e) =$
-1	-1	-0.538
0	0	0
1	1	0.538
2	0.8	0.595
3	0.6	0.512
4	0.471	0.427
5	0.385	0.361

2.5 Gegeben sind nun die Funktionen $G(k,x) := \ln\left(x^2 + k\right)$ mit $k \in \mathbb{R},\ k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Funktion G_k eine Stammfunktion der entsprechenden Funktion g_k aus 2.0 ist, berechnen Sie den Integralwert $I = \int_0^2 (g(1,x) - g(e,x))\,dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

$G(k,x) := \ln\left(x^2 + k\right) \qquad G'(x,k) = \frac{1}{x^2 + k} \cdot 2 \cdot x = \frac{2 \cdot x}{x^2 + k} = g(x,k)$

$\Rightarrow$ G_k ist eine Stammfunktion von g_k.

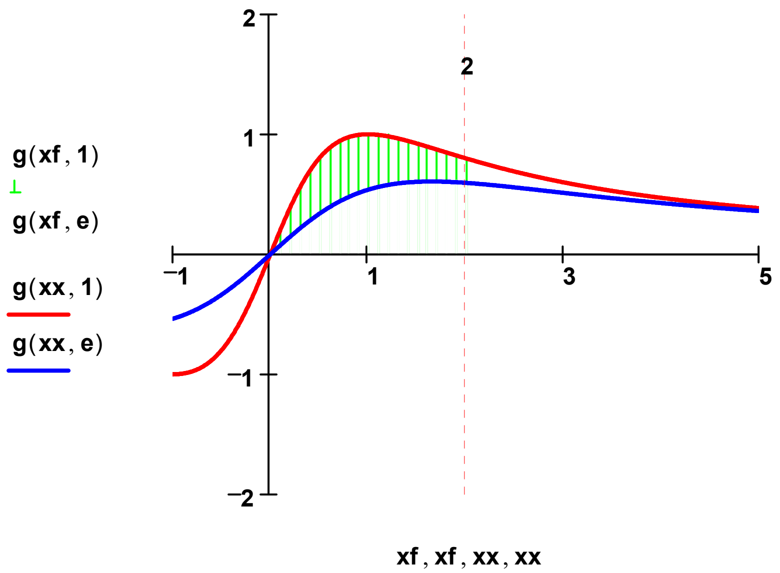
$$I = \int_0^2 (g(1,x) - g(e,x))\,dx = \left[G_1 \cdot (2) - G_e \cdot (2)\right] - \left[G_1 \cdot (0) - G_e \cdot (0)\right]$$

$$I = (\ln(4+1) - \ln(4+e)) - (\ln(0+1) - \ln(0+e))$$

$$I = (\ln(5) - \ln(4+e)) - (\ln(1) - \ln(e)) = 0.705$$

I ist die Fläche, die von g1 und ge und der Senkrechten $x = 2$ begrenzt wird (siehe Skizze).

$xf := 0, 0.1 .. 2$



3 Bei einer bestimmten gedämpften Schwingung kann mathematisch idialisiert und ohne Verwendung von Einheiten die Auslenkung s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für $t \geq 0$ durch den folgenden Term beschrieben werden:

$$s(t) := 2 \cdot e^{-t} \cdot (\cos(5 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(5 \cdot t))$$

3.1 Bilden Sie die erste Ableitung von s(t) nach der Zeit t und begründen Sie, dass die Extremalpunkte der Auslenkung s(t) jeweils auf einem der Graphen der Funktionen $y(t) := 2 \cdot e^{-t}$ oder $y(t) := -2 \cdot e^{-t}$ liegen.

Zur Kontrolle: $\frac{d}{dt}s(t) = -10.4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5 \cdot t)$

$$s(t) := \frac{2 \cdot (\cos(5 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(5 \cdot t))}{e^t}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{[2 \cdot (-5 \cdot \sin(5 \cdot t) + \cos(5 \cdot t))] \cdot e^t - [2 \cdot (\cos(5 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(5 \cdot t))] \cdot e^t}{\left(e^t\right)^2}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{e^t \cdot [(-10 \cdot \sin(5 \cdot t) + 2 \cdot \cos(5 \cdot t)) - (2 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0.4 \cdot \sin(5 \cdot t))]}{\left(e^t\right)^2}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{-10.4 \cdot \sin(5 \cdot t)}{e^t} = -10.4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5 \cdot t)$$

Extremum: $\frac{d}{dt}s\left(t_0\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(5 \cdot t_0\right) = 0 \Rightarrow 5t_0 = k \cdot \pi$ mit $k \in N_0$

$$\Rightarrow \cos\left(5 \cdot t_0\right) = \pm 1$$

$$y_E = 2 \cdot e^{-t_0} \cdot \left(\cos\left(5 \cdot t_0\right) + 0.2 \cdot \sin\left(5 \cdot t_0\right)\right) \Rightarrow y_0 = 2 \cdot e^{-t_0} \cdot (\pm 1 + 0)$$

$\Rightarrow$ Die Extrema liegen auf $y = 2 \cdot e^{-t}$ oder $y = -2 \cdot e^{-t}$.

3.2 Zeigen Sie, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Maxima der Auslenkung konstant $\Delta t := 0.4 \cdot \pi$ beträgt. Berechnen Sie, auf wie viel Prozent die Auslenkung von einem beliebigen Maximum zum nächsten Maximum abnimmt.

Alle Maxima (für 'cos' > 0):

$\Rightarrow \cos\left(5 t_m\right) = 1 \Rightarrow 5 \cdot t_m = k \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow t_m = \frac{2}{5} \cdot \pi \cdot k$ mit $k \in N_0$

$$t_1 := \frac{2}{5} \cdot \pi \cdot 1 \quad t_2 := \frac{2}{5} \cdot \pi \cdot 2 \quad t_3 := \frac{2}{5} \cdot \pi \cdot 3 \ \ldots \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2}{5} \cdot \pi = 0.4 \cdot \pi$$

$$\frac{2 \cdot e^{-\left(t_m + \Delta t\right)}}{2 \cdot e^{-t_m}} = \frac{e^{-t_m} \cdot e^{-\Delta t}}{e^{-t_m}} = e^{-\Delta t} = e^{-0.4 \cdot \pi} = 0.28 = 28\%$$

I