Abschlussprüfung 6.6.2003 Nichttechnik S I Lösung

1.0 In einem Mischwald wird eine Versuchsfläche auf Schäden durch Wildverbiss an den Jungtrieben der Bäume untersucht. Einzige Nadelbaumart ist die Fichte (F); sie macht 25 % des Baumbestandes aus. Auf der Versuchsfläche befinden sich außerdem 45 % Buchen (B) ansonsten Eichen (E). Alle Baumarten kommen auf der Fläche gleichmäßig verteilt vor.
Bei einer Zählung werden folgende Schadensanteile durch Verbiss unter den jeweiligen Baumarten beobachtet: 20 % bei Fichten, 30 % bei Buchen und 25 % bei Eichen.
Als Zufallsexperiment wird die Auswahl eines beliebigen Baumes betrachtet; dabei wird die Baumart festgestellt und geprüft, ob Verbiss (**V**) vorliegt oder nicht ($\overline{\mathbf{V}}$). Die gegebenen Prozentsätze werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Ermitteln Sie alle 6 Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms.
6 P

$\mathbf{PF := 0.25}$

$\mathbf{PB := 0.45}$

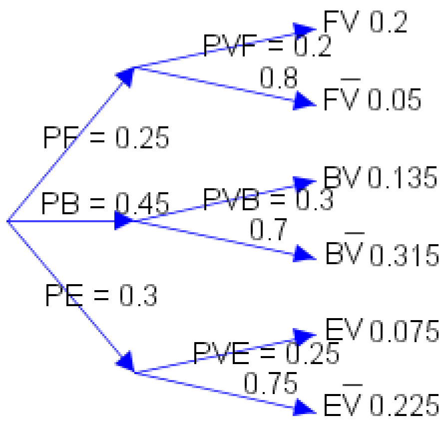
$\mathbf{PE := 1 - PF - PB} \quad \mathbf{PE = 0.3}$

1P

$\mathbf{PVF := 0.2}$

$\mathbf{PVB := 0.3}$

$\mathbf{PVE := 0.25}$



5P

1.2.0 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:
A1: „Ein zufällig ausgewählter Baum ist ein Laubbaum ohne Verbiss.“
A2: „Ein zufällig ausgewählter Baum ist eine Fichte oder eine Eiche.“

1.2.1 Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an.
2 P

$A1 = \{ \mathbf{B\overline{V}}, \mathbf{E\overline{V}} \}$ 1P $\qquad A2 = \{ \mathbf{FV}, \mathbf{F\overline{V}}, \mathbf{EV}, \mathbf{E\overline{V}} \}$ 1P

1.2.2 Prüfen Sie ob die beiden Ereignisse A1 und A2 stochastisch unabhängig sind.
4 P

$A1 \cap A2 = \{ \mathbf{E\overline{V}} \} \qquad \mathbf{P := 0.225}$ 1P

$\mathbf{PA1 := 0.315 + 0.225} \qquad \mathbf{PA1 = 0.54}$ 1P

$\mathbf{PA2 := 0.2 + 0.05 + 0.075 + 0.225} \qquad \mathbf{PA2 = 0.55}$ 1P $\qquad \mathbf{PA1 \cdot PA2 = 0.297}$ => Stochastisch unabhängig! 1P

1.3.0 Nun werden innerhalb der Versuchsfläche 20 Bäume zufällig ausgewählt.

1.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen mehr als fünf Fichten befinden.
3 P

$\mathbf{P := 1 - SPBin\_h(20, 0.25, 5)}$ 2P $\qquad \mathbf{P = 0.38283}$ 1P

1.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der Laubbäume höchstens um 2 vom
4 P Erwartungswert abweicht.

$\mathbf{\mu := 20 \cdot 0.75} \qquad \mathbf{\mu = 15}$ 1P

$$\mathbf{P := \sum_{k=13}^{17} PBinver(20, 0.75, k)}$$ 1P $\qquad \mathbf{P = 0.80693}$ 2P

2.0 Bei der Untersuchung von Kiefernnadeln wird die Länge L von 200 zufällig ausgewählten Nadeln bestimmt und in sechs Längengruppen eingeteilt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der jeweiligen Längengruppe an. Dabei ergibt sich folgende Verteilung mit a, b $\in$ N:

L in mm	$L \le 40$	$40 < L \le 44$	$44 < L \le 48$	$48 < L \le 52$	$52 < L \le 56$	$56 < L$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	a	2a	90	b	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nadel in einer der Längengruppen 4 bis 6 liegt, beträgt dabei 0.66.

2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b.

3 P

$0.66 = \frac{1}{200} \cdot (90 + b + 12)$ => $b := 200 \cdot 0.66 - 102$ $b = 30$ 1.5P

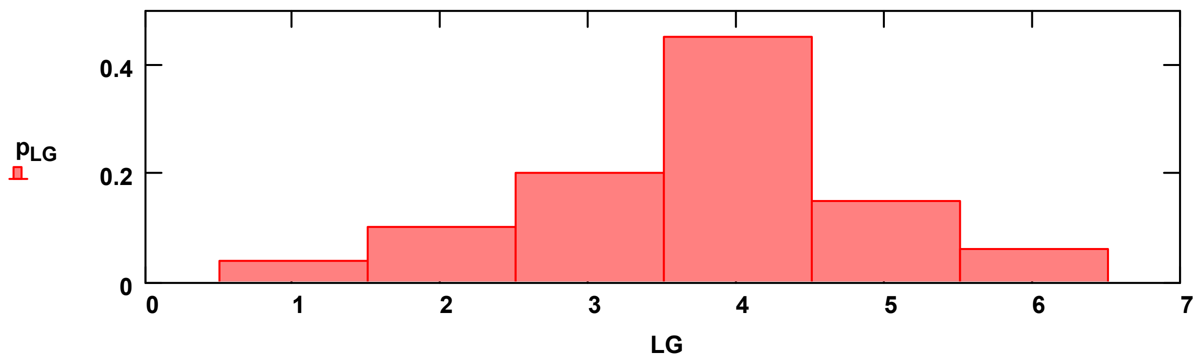
$8 + a + 2a + 90 + b + 12 = 200$ => $a := \frac{200 - 8 - 90 - 30 - 12}{3}$ $a = 20$ 1.5P

2.2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben a = 20 und b = 30.

2.2.1 Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und zeichnen Sie ein zugehöriges
4 P Histogramm.

L in mm	$L \le 40$	$40 < L \le 44$	$44 < L \le 48$	$48 < L \le 52$	$52 < L \le 56$	$56 < L$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
p*200	8	20	40	90	30	12

$LG := 1..6$ $p_1 := 8$ $p_2 := 20$ $p_3 := 40$ $p_4 := 90$ $p_5 := 30$ $p_6 := 12$ $p_{LG} := \frac{p_{LG}}{200}$ 2P



2P

2.2.2 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen
6 P Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

$\mu := \sum_{LG=1}^{6} LG \cdot p_{LG}$ $\mu = 3.75$ 1.5P

$var := \sum_{LG=1}^{6} (LG)^2 \cdot p_{LG} - \mu^2$ $var = 1.2875$ 1.5P oder $var = \sum_{LG=1}^{6} (LG - \mu)^2 \cdot p_{LG}$

$\sigma := \sqrt{var}$ $\sigma = 1.13468$ 0.5P

$\mu - \sigma = 2.61532$ $\mu + \sigma = 4.88468$ $P(2.6 < X < 4.9) = P(3 \le X \le 4) = \frac{40 + 90}{200} = 0.65$ 1.5P

1P

Binomialkoeffizient: $\mathbf{bk}(\mathbf{n},\mathbf{k}) := \mathbf{wenn}\left(\mathbf{k} < \mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{bk}(\mathbf{n}-\mathbf{1}, \mathbf{k}-\mathbf{1})\right)$

Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli: $\mathbf{PBinver}(\mathbf{n},\mathbf{p},\mathbf{k}) := \mathbf{bk}(\mathbf{n},\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{1}-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$

n: Anzahl der Versuche
p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer
k: Anzahl der Treffer

Summenwahrscheinlichkeit, höchstens z Treffer: $\mathbf{SPBin\_h}(\mathbf{n},\mathbf{p},\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{z}} \mathbf{PBinver}(\mathbf{n},\mathbf{p},\mathbf{k})$

Summenwahrscheinlichkeit, mindestens z Treffer: $\mathbf{SPBin\_m}(\mathbf{n},\mathbf{p},\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{z}}^{\mathbf{n}} \mathbf{PBinver}(\mathbf{n},\mathbf{p},\mathbf{k})$