Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Satz von Rolle

Ist die Funktion f stetig im Intervall [a ; b] und differenzierbar in]a ; b[und **f(a)=f(b)=0** , dann existiert mindestens eine Stelle x0 €]a ; b[so, dass gilt $f'(x0) = 0$.

EigenschaftendiffbarerFun_1_Rolle.gxt

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die Funktion f stetig im Intervall [a ; b] und differenzierbar in]a ; b[, dann existiert mindestens eine Stelle x0 €]a ; b[so, dass gilt $f'(x0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

EigenschaftendiffbarerFun_2_MWSatz.gxt

Lineare Approximation

Der Mittelwertsatz: $$f'(x0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x0) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$$

$$f(b) = f'(x0) \cdot (b - a) + f(a)$$

Setze nun **b=x** und **x0=a** $$f(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$ "Extrapolation, **Lineare Approximation**"

(Gilt aber nur ungefähr, da die Stelle x0 nur näherungsweise bekannt und somit auch nur $a \approx x0$)

Daraus lässt sich eine Näherungsberechnung für eine Nullstelle einer Funktion gewinnen:

$$f(x) = 0 = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$x - a = \frac{-f(a)}{f'(a)} \qquad \text{mit } f'(a) \neq 0$$

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Fortlaufend berechnet ergibt sich dann folgender Algorithmus, der als **Newtonsches Näherungsverfahren** bekannt ist:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$ "**Newtonverfahren**"

>>>> Weiterführend: **Newtonverfahren.mcd** oder **Paket Newtonverfahren von Eberhard Lehmann**

Berechnet man auch noch die Ableitung nur näherungsweise (nach dem Mittelwertsatz)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$ (aus einem Punkt voher)

dann erhält man das **Sekantenverfahren**, wenn man $f'(x_i)$ in das Newtonverfahren einsetzt:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

>>>> Weiterführend: **Sekantenverfahren.mcd**