Übung zur Eigenschaften von Funktionen (2)

(1) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{-1}{2}\cdot x^4 + x^3\cdot k + \frac{3}{2}\cdot x^3 - 3\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - k\cdot x - \frac{3}{2}\cdot x + 3\cdot k \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|--> ∞ .
2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k
3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f Berührpunkte hat.
4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.
5. Skizzieren Sie den Graphen von f für k = 1.
6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

(2) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{3}{4}\cdot x^3\cdot k + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot k\cdot x - k^2 \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|--> ∞ .
2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k
3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f Berührpunkte hat.
4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.
5. Skizzieren Sie den Graphen von f für k = 1.
6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

(3) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{-1}{10}\cdot x^4 + k\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{2}{5}\cdot x^2 - 4\cdot k\cdot x + 10\cdot k^2 \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|--> ∞ .
2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k
3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f **keine** Berührpunkte hat.
4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.
5. Skizzieren Sie den Graphen von f für $k = \frac{1}{5}$.
6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

Lösung:

(1) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{-1}{2}\cdot x^4 + x^3\cdot k + \frac{3}{2}\cdot x^3 - 3\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - k\cdot x - \frac{3}{2}\cdot x + 3\cdot k \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|--> ∞ .

$$\lim_{x\to\infty} f(k,x) \to -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(k,x) \to -\infty$$

2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k

Finde $x_1 = 1$

$$f1(k,x) := \frac{\frac{-1}{2}\cdot x^4 + x^3\cdot k + \frac{3}{2}\cdot x^3 - 3\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - k\cdot x - \frac{3}{2}\cdot x + 3\cdot k}{x-1}$$

$$f1(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{-1}{2}\cdot x^3 + x^2\cdot k + x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - 2\cdot x\cdot k - 3\cdot k$$

Finde $x_2 = -1$

$$f2(k,x) := \frac{\frac{-1}{2}\cdot x^3 + x^2\cdot k + x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - 2\cdot x\cdot k - 3\cdot k}{x+1}$$

$$f2(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{-1}{2}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x + x\cdot k - 3\cdot k$$

$$D(k) := \left(\frac{3}{2}+k\right)^2 - 4\cdot\frac{-1}{2}\cdot(-3\cdot k) \text{ entwickeln } \to \frac{9}{4} - 3\cdot k + k^2 \qquad D(k) := \left(\frac{3}{2}-k\right)^2$$

$$x_3(k) := \frac{-\left(\frac{3}{2}+k\right) - \left(\frac{3}{2}-k\right)}{2\cdot\frac{-1}{2}} \to 3 \qquad x_4(k) := \frac{-\left(\frac{3}{2}+k\right) + \left(\frac{3}{2}-k\right)}{2\cdot\frac{-1}{2}} \to 2\cdot k$$

3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f Berührpunkte hat.

$$f(k,x) = \frac{-1}{2}\cdot(x+1)(x-1)(x-3)(x-2k) \qquad \text{Linearfaktorzerlegung}$$

Es existiert ein BP bei -1, falls $1 = -2k$, also $k = \frac{-1}{2}$

Es existiert ein BP bei 1, falls $-1 = -2k$, also $k = \frac{1}{2}$

Es existiert ein BP bei 3, falls $-3 = -2k$, also $k = \frac{3}{2}$

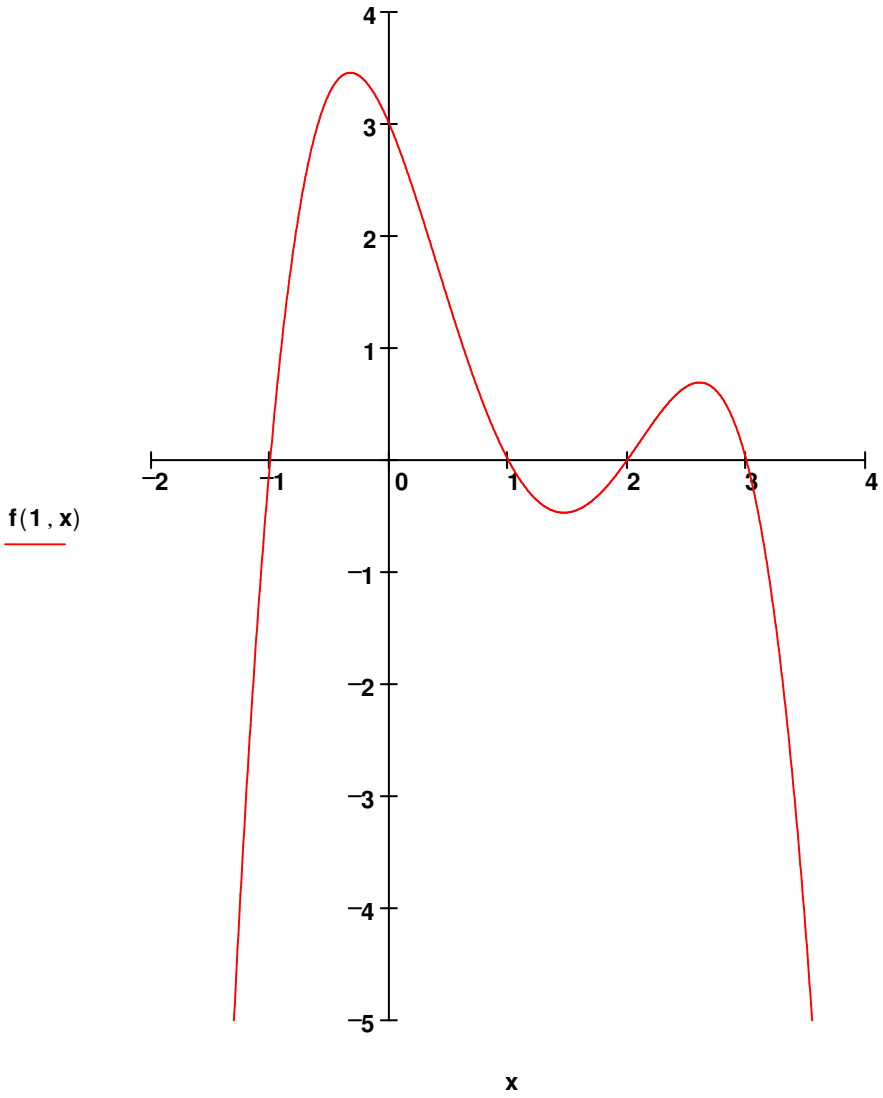
4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.

Aus den Nullstellen: Symmetrie ist nur möglich, falls der Parameter eine Nullstelle bei -3 produziert.

=> $3 = -2k$ => $k = \frac{-3}{2}$

$g(x) := f\left(\frac{-3}{2}, x\right) \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - \frac{9}{2}$ $\qquad g(-x) \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - \frac{9}{2}$ $\qquad$ => Achsensymmetrie

5. Skizzieren Sie den Graphen von f für k = 1.



6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

Der Graph von f(1,x) ist smost für (ca.) $x \le -0.5$ und für $1.5 \le x \le 2.5$ und
smofa für (ca.) $-0.5 \le x \le 1.5$ und für $2.5 \le x$

(2) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{3}{4}\cdot x^3\cdot k + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot k\cdot x - k^2 \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|--> ∞ .

$$\lim_{x\to\infty} f(k,x) \to \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(k,x) \to \infty$$

2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k

Finde $x_1 = 1$

$$f1(k,x) := \frac{\frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{3}{4}\cdot x^3\cdot k + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot k\cdot x - k^2}{x-1}$$

$$f1(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot x^2\cdot k + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x\cdot k^2 - \frac{3}{2}\cdot x\cdot k + k^2$$

Finde $x_2 = -2$

$$f2(k,x) := \frac{\frac{1}{4}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k^2\cdot x - \frac{3}{2}\cdot k\cdot x + k^2}{x+2}$$

$$f2(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{3}{4}\cdot x\cdot k + \frac{1}{2}\cdot k^2$$

$$D(k) := \left(-\frac{3}{4}\cdot k\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot k^2 \text{ entwickeln } \to \frac{1}{16}\cdot k^2 \qquad D(k) := \left(\frac{k}{4}\right)^2$$

$$x_3(k) := \frac{-\left(-\frac{3}{4}\cdot k\right) - \frac{k}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}} \to k \qquad x_4(k) := \frac{-\left(-\frac{3}{4}\cdot k\right) + \frac{k}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}} \to 2\cdot k$$

3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f Berührpunkte hat.

$$g(k,x) = \frac{1}{4}\cdot(x+2)(x-1)(x-k)(x-2k) \qquad \text{Linearfaktorzerlegung}$$

Es existiert ein BP bei -2, falls $2 = -k$, also $k = -2$ oder falls $2 = -2k$, also $k = -1$

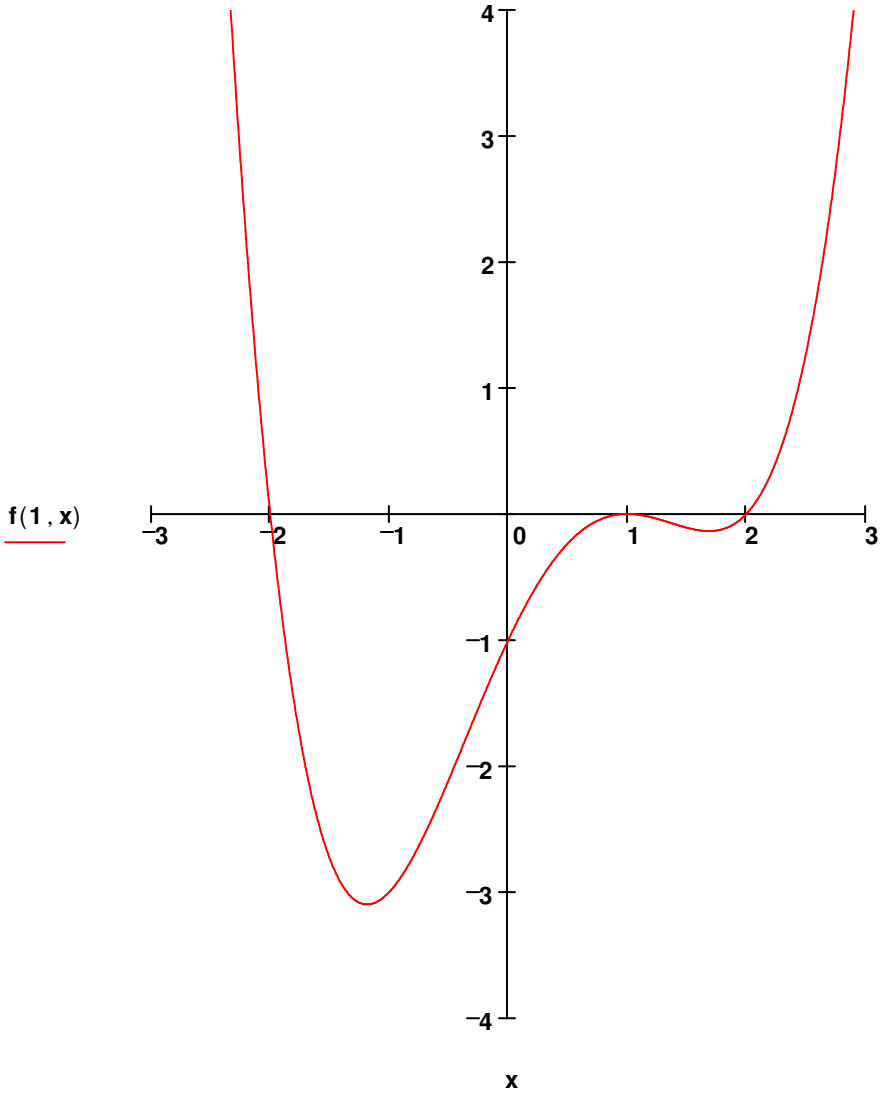
Es existiert ein BP bei 1, falls $-1 = -k$, also $k = 1$ oder falls $-1 = -2k$, also $k = \frac{1}{2}$

Es existiert ein BP bei 0, falls $-k = -2k$, also $k = 0$

4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.

Aus den Nullstellen: Symmetrie ist nur möglich, falls der Parameter eine Nullstelle bei -2 und bei 1 produziert. Das ist nicht möglich, also kann die Funktion nicht symmetrisch werden.

5. Skizzieren Sie den Graphen von f für k = 1.



6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

Der Graph von f(1,x) ist smost für (ca.) $-1.1 \le x \le 1$ und für $1.7 \le x$ und
smofa für (ca.) $x \le -1.1$ und für $1 \le x \le 1.7$

(3) Gegeben ist die folgende, vom Parameter k abhängige Funktionenschar f.

$$f(k,x) := \frac{-1}{10}\cdot x^4 + k\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{2}{5}\cdot x^2 - 4\cdot k\cdot x + 10\cdot k^2 \qquad \text{mit } k \in R$$

1. Bestimmen Sie das Grenzverhalten |x|-->∞ .

$$\lim_{x\to\infty} f(k,x) \to -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(k,x) \to -\infty$$

2. Ermitteln Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von k

Finde $x_1 = 2$

$$f1(k,x) := \frac{\frac{-1}{10}\cdot x^4 + k\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot k^2\cdot x^2 + \frac{2}{5}\cdot x^2 - 4\cdot k\cdot x + 10\cdot k^2}{x-2}$$

$$f1(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{-1}{10}\cdot x^3 + x^2\cdot k - \frac{1}{5}\cdot x^2 - \frac{5}{2}\cdot x\cdot k^2 + 2\cdot x\cdot k - 5\cdot k^2$$

Finde $x_2 = -2$

$$f2(k,x) := \frac{\frac{-1}{10}\cdot x^3 + k\cdot x^2 - \frac{1}{5}\cdot x^2 - \frac{5}{2}\cdot k^2\cdot x + 2\cdot k\cdot x - 5\cdot k^2}{x+2}$$

$$f2(k,x) \text{ vereinfachen } \to \frac{-1}{10}\cdot x^2 + x\cdot k - \frac{5}{2}\cdot k^2$$

$$D(k) := k^2 - 4\cdot\frac{-1}{10}\cdot\left(-\frac{5}{2}\cdot k^2\right) \text{ entwickeln } \to 0 \qquad x_{34}(k) := \frac{-k}{2\cdot\frac{-1}{10}} \to 5\cdot k$$

3. Berechnen Sie k so, dass der Graph von f **keine** Berührpunkte hat.

$$f(k,x) = -\frac{1}{10}\cdot(x+2)(x-2)(x-5k)^2 \qquad \text{Linearfaktorzerlegung}$$

Es existiert kein BP bei 5k, falls $2 = -5k$, also $k = \frac{-2}{5}$ (Dann dreifach-SP bei -2)

Es existiert kein BP bei 5k, falls $-2 = -5k$, also $k = \frac{2}{5}$ (Dann dreifach-SP bei 2)

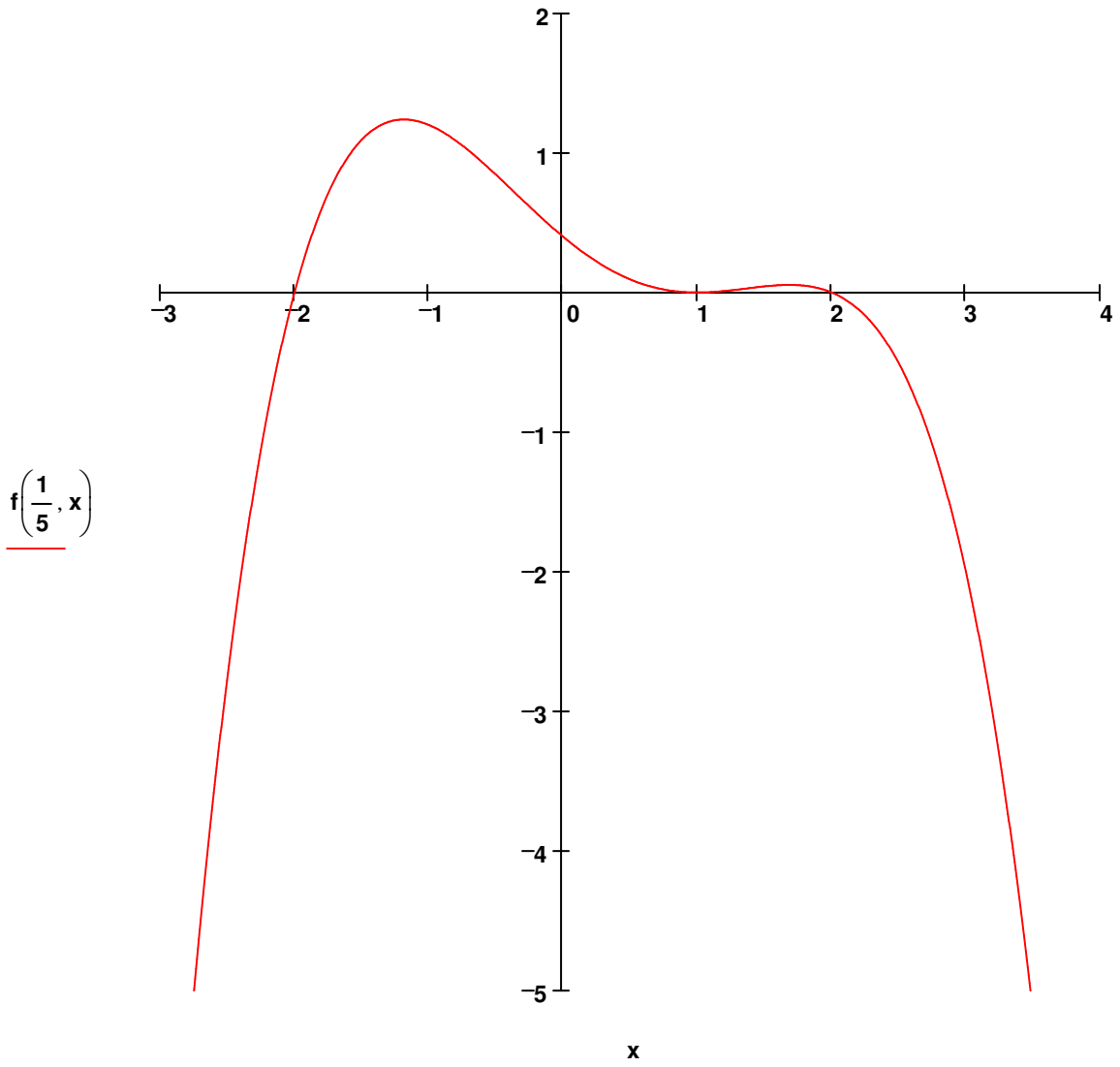
4. Prüfen Sie, ob es Werte von k gibt, für die der Graph von f symmetrisch ist.

Aus den Nullstellen: Symmetrie ist nur möglich, falls der Parameter einen BP bei 0 produziert.

=> $k = 0$

$$g(x) := f(0,x) \to \frac{-1}{10}\cdot x^4 + \frac{2}{5}\cdot x^2 \qquad g(-x) \to \frac{-1}{10}\cdot x^4 + \frac{2}{5}\cdot x^2 \qquad \text{=> Achsensymmetrie}$$

5. Skizzieren Sie den Graphen von f für $\mathbf{k = \frac{1}{5}}$.



6. Lesen Sie die Monotonieintervalle aus dem Graphen ab.

Der Graph von f(1,x) ist smost für (ca.) $\mathbf{x \le -1.2}$ und für $\mathbf{1 \le x \le 1.8}$ und
smofa für (ca.) $\mathbf{-1.2 \le x \le 1}$ und für $\mathbf{1.8 \le x}$