EL / GS - 23.08.05 - b1_quadGl.mcd

Quadratische Gleichungen

Definition:
Eine Bestimmungsgleichung mit der Definitionsmenge ID $\subseteq$ G heißt quadratisch (oder zweiten Grades), wenn sie auf die Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit a, b, c $\in$ IR und $a \neq 0$ gebracht werden kann.

Bezeichnung: Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge haben, heißen **äquivalent.**

Regel:
Ist die quadratische Gleichung in der Hauptform gegeben, dann lässt sie sich in folgende äquivalente Gleichung umformen: $x = \frac{-b}{2 \cdot a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Speziell:

$a \neq 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$: **Reinquadratische Gleichung** $x^2 = \frac{-c}{a}$, **Lösung durch Wurzelziehen.**

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$: **Quadratische Gleichung** $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$, **Lösung durch Ausklammern.**

Bestimmung der Lösungsmenge:

(1) Sei $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ **und** $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \neq 0 \Rightarrow$

Zwei Lösungen $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ **und** $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ $\quad$ $IL = \{ x_1 ; x_2 \}$

(2) Sei $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ **und** $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow$ **Eine Lösung** $x_{12} = \frac{-b}{2 \cdot a}$ $\quad$ $IL = \{ \frac{-b}{2 \cdot a} \}$

(3) Sei $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ **und** $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \Rightarrow$ **Keine Lösung** $\quad$ $IL = \{ \}$

(4) Sei $a \neq 0$; $b = 0$; **und** $a \cdot c < 0 \Rightarrow$ **Zwei Lösungen** $x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ **und** $x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$ $\quad$ $IL = \{ x_1 ; x_2 \}$

(5) Sei $a \neq 0$; $b = 0$; **und** $a \cdot c > 0 \Rightarrow$ **Keine Lösung** $\quad$ $IL = \{ \}$

(6) Sei $a \neq 0$; $b \neq 0$; **und** $c = 0$ $\Rightarrow$ **Zwei Lösungen** $x_1 = 0$ **und** $x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad$ $IL = \{ 0 ; -\frac{b}{a} \}$

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ **ID = IR**

Lösung: $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **IL = {2; 4}**

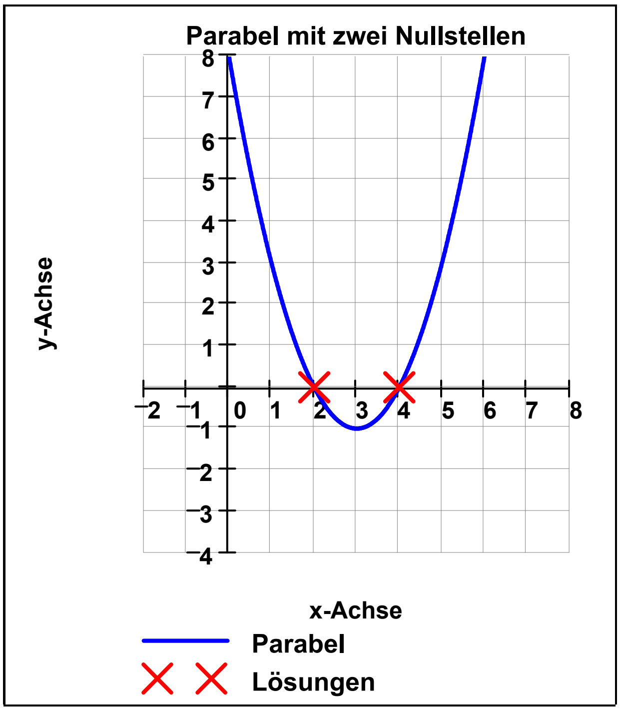
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := x^2 - 6 \cdot x + 8$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Parabel hat **zwei einfache Nullstellen:** $NS_1(2 / 0)$ $NS_2(4 / 0)$

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ ID = IR

Lösung: $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ **IL = {3}**

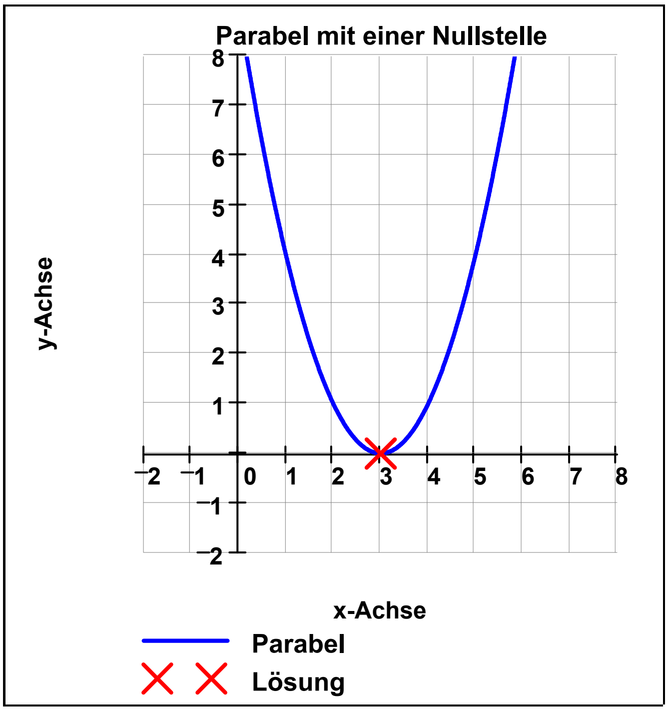
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := x^2 - 6 \cdot x + 9$ äquivalenter Funktionsterm: $p(x) := (x - 3)^2$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Parabel hat **eine zweifache Nullstellen:** **$NS_{1/2}(3 / 0)$**

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $x^2 - 6 \cdot x + 11 = 0$ **ID = IR**

Lösung: $x^2 - 6 \cdot x + 13 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot i \\ 3 - 2 \cdot i \end{pmatrix}$ In IR keine Lösung! **IL = { }**

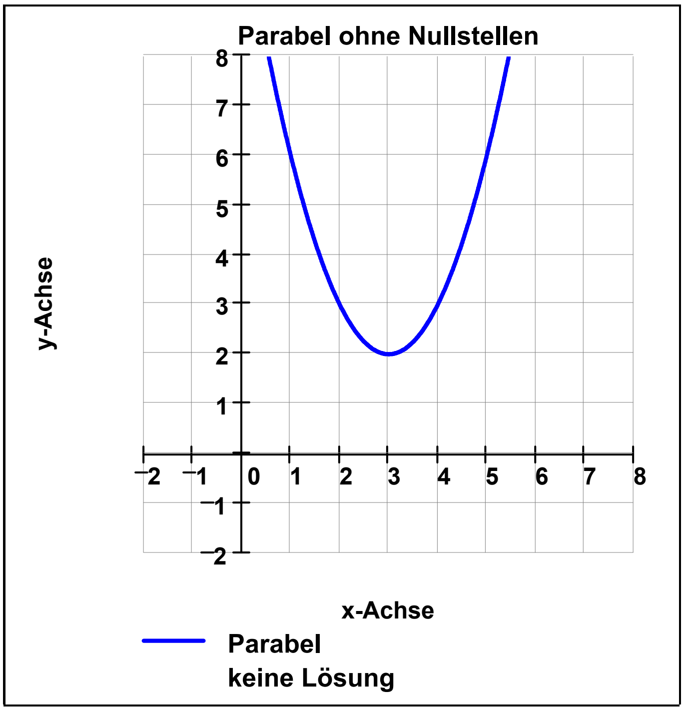
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := x^2 - 6 \cdot x + 11$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 11 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 + i \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ 3 - i \cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ in IR nicht definiert

Die Parabel hat **keine Nullstellen.**

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2 = 0$ äquivalente Gleichung: $x^2 = 4$ **ID = IR**

Lösung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **IL = { −2 ; 2 }**

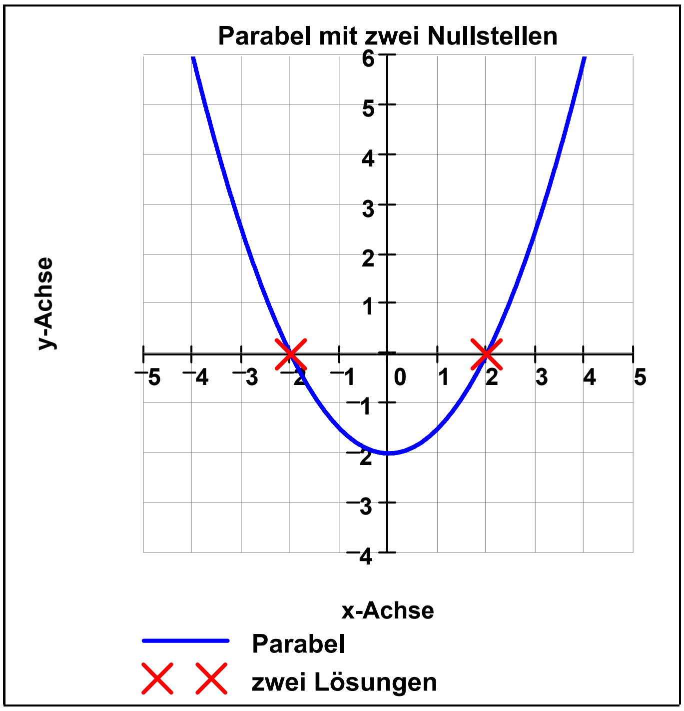
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Parabel hat **zwei einfache Nullstellen:** $NS_1(-2 / 0)$ $NS_2(2 / 0)$

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2 = 0$ äquivalente Gleichung: $x^2 = -4$ **ID = IR**

Lösung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot i \\ -2\cdot i \end{pmatrix}$ in IR keine Lösung **IL = { }**

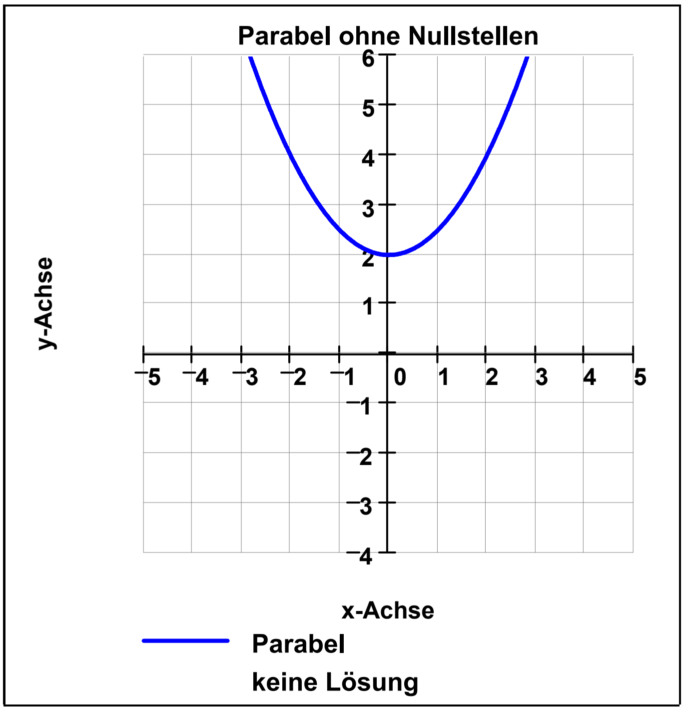
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2 = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot i \\ -2\cdot i \end{pmatrix}$

Die Parabel hat **keine Nullstellen:**

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 6:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x = 0$ äquivalente Gleichung: $\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-4) = 0$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbb{L} = \{\,0;\ 4\,\}$

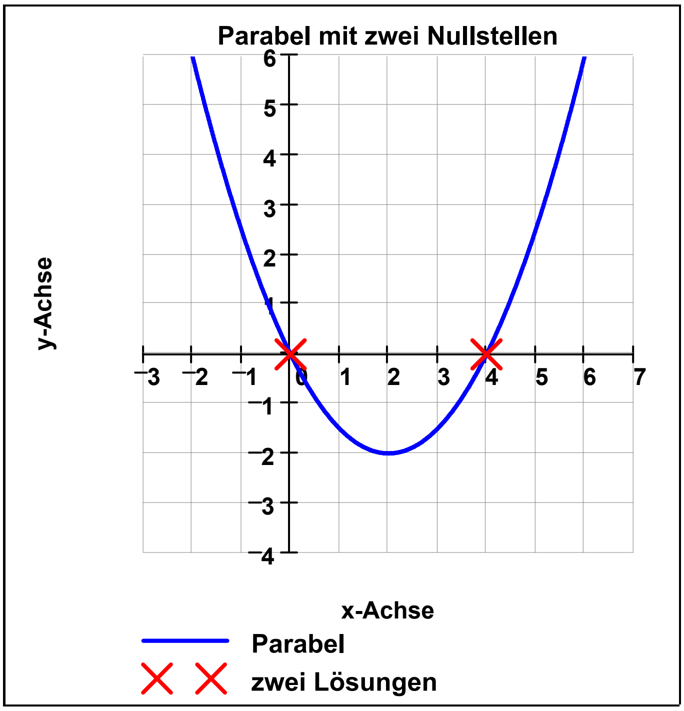
Teilaufgabe b)

Parabel: $p(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x$

Lösung = Nullstellen der Parabel: $p(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Parabel hat **zwei einfache Nullstellen:**

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 7:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $x^2 - 6 \cdot x + 10 = 2$ **ID = IR**

linke Seite: $l(x) := x^2 - 6 \cdot x + 10$

rechte Seite: $r(x) := 2$

in die Hauptform bringen: $l(x) - r(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$

Lösung: $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **IL = {2; 4}**

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

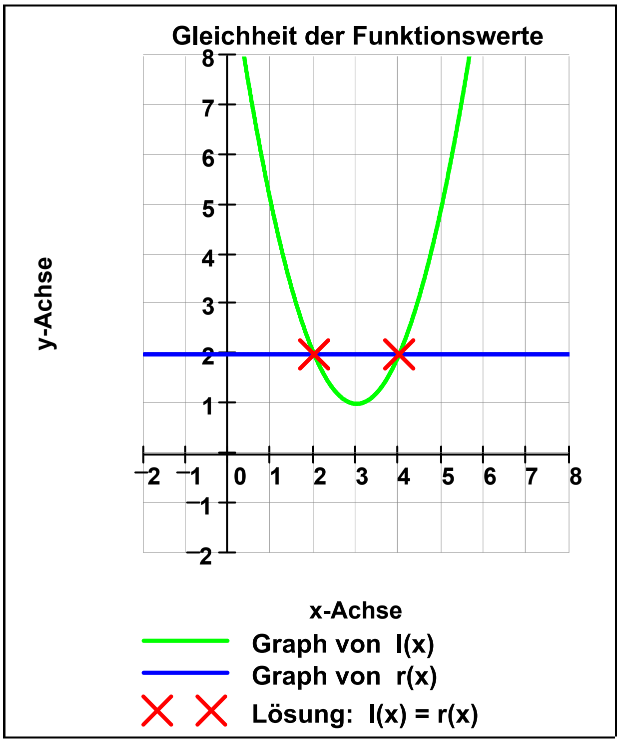
Linke Funktion: $l(x) := x^2 - 6 \cdot x + 10$

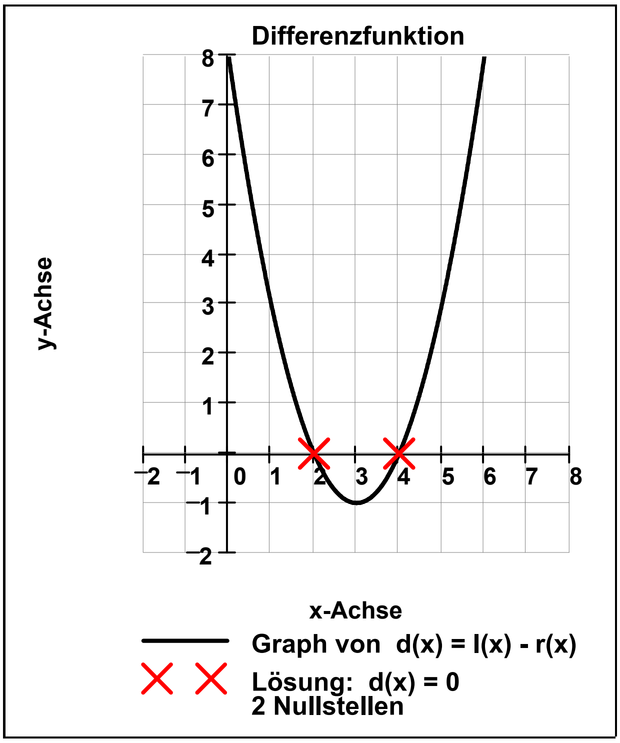
Rechte Funktion: $r(x) := 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 8$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 8:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion.

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + 2 = -\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2$ **ID = IR**

linke Seite: $l(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + 2$ rechte Seite: $r(x) := -\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2$

in die Hauptform bringen: $l(x) - r(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{3}\cdot x^2 - 4\cdot x = 0$

Lösung: $\frac{2}{3}\cdot x^2 - 4\cdot x = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ **IL = { 0; 6 }**

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + 2$

Rechte Funktion: $r(x) := -\frac{1}{6}\cdot x^2 + x + 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow \frac{2}{3}\cdot x^2 - 4\cdot x$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $d(x) = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung: