EL / GS - 23.08.05 - d1_Bruchgl.mcd

Bruchgleichungen

Definition:
Eine Gleichung, bei der eine Variable x auch im Nenner vorkommt, ohne dass man sie kürzen kann, heißt Bruchgleichung.

Bezeichnung: Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge haben, heißen **äquivalent.**

Bestimmung der Lösungsmenge:
Man löst eine Bruchgleichung, indem man die Definitionsmenge bestimmt (Nenner ungleich Null), die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert und die so entstehende Gleichung löst.

Definition:
Eine Gleichung $\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = 0$ mit a,b,c,d $\in$ IR und $c \cdot x + d \neq 0$ heißt lineare Bruchgleichung.

Bestimmung der Lösungsmenge:

(1) Man löst die Bruchgleichung $\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = 0$, indem man die Definitionsmenge ID = IR \ $\{-\frac{d}{c}\}$ bestimmt, die Gleichung mit dem Hauptnenner $c \cdot x + d \neq 0$ multipliziert und die so entstehende Gleichung $a \cdot x + b = 0$ löst.

(2) Man löst die Bruchgleichung $\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = k$ (k = Konstante), indem man die Definitionsmenge ID = IR \ $\{-\frac{d}{c}\}$ bestimmt und die Bruchgleichung in die Form $\frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} - k = 0$ bringt.

Die linke Seite wird sodann auf den Hauptnenner gebracht, beide Terme zusammengefasst und die neue Gleichung $\frac{A \cdot x + B}{c \cdot x + d} = 0$ nach Schema (1) gelöst.

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{2}{x+3} = -2$ $\qquad$ $\mathbf{ID = IR \setminus \{ -3 \}}$

Lösung: $\frac{2}{x+3} = -2 \text{ auflösen}, x \rightarrow -4$ $\qquad$ $\mathbf{IL = \{ -4 \}}$

Durch Multiplizieren mit dem Nenner Umformung der Bruchgleichung in eine lineare Gleichung:

$$2 = -2\cdot(x+3) \text{ auflösen}, x \rightarrow -4$$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

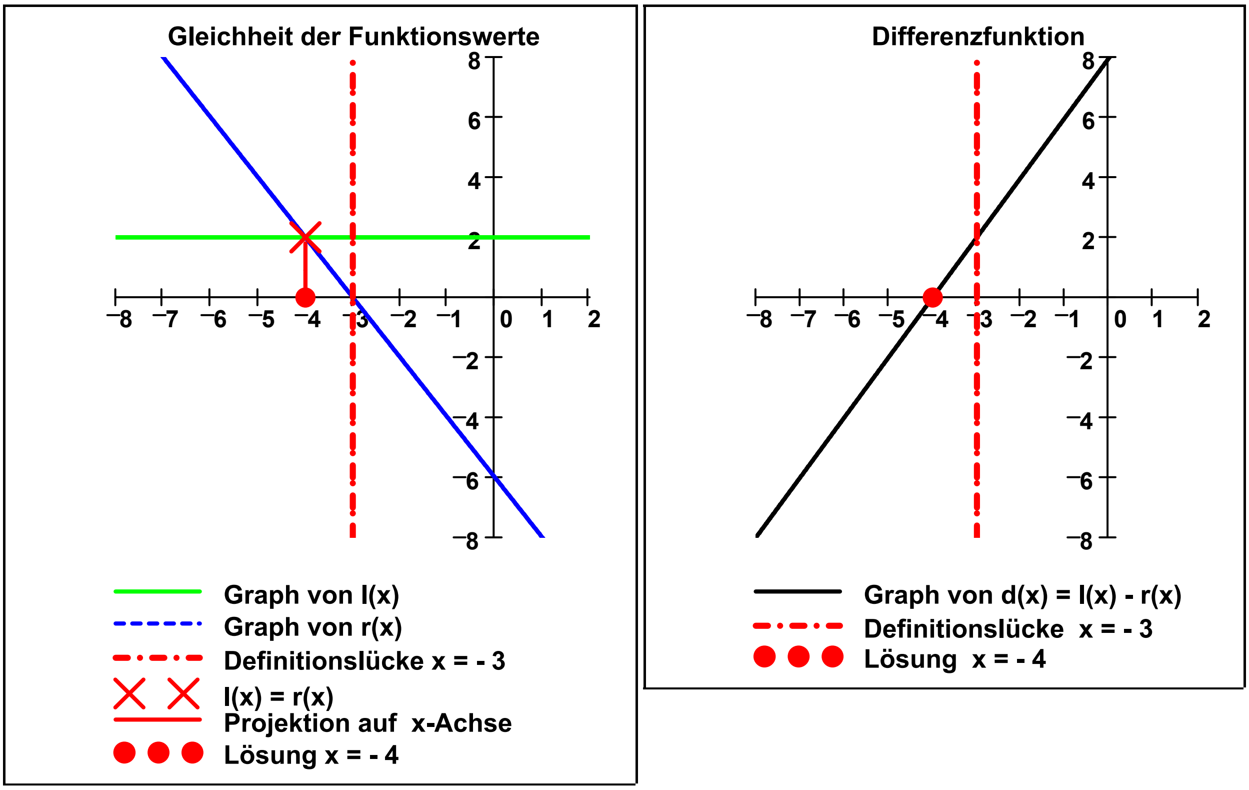
linke Funktion: $l(x) := 2$

rechte Funktion: $r(x) := -2\cdot(x+3)$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow 8 + 2\cdot x$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\qquad$ $d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -4$

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-4}$ $\quad$ **ID = IR \ { 2 ; 4 }**

Lösung: $\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-4}$ auflösen, $x \rightarrow 5$ $\quad$ **IL = { 5 }**

Durch Multiplizieren mit dem Hauptenner Umformung der Bruchgleichung in eine lineare Gleichung:

$$3 \cdot (x-4) = x-2$$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

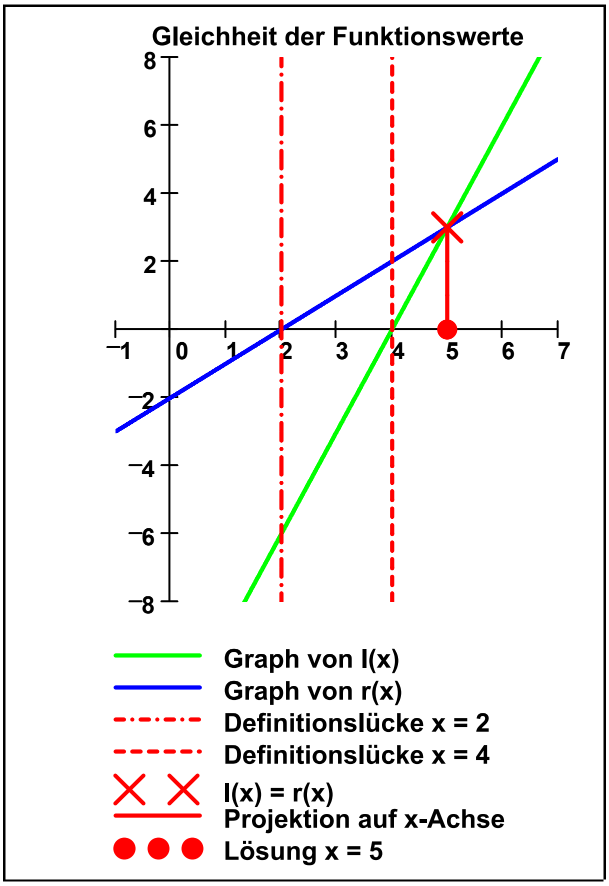
linke Funktion: $l(x) := 3 \cdot (x-4)$

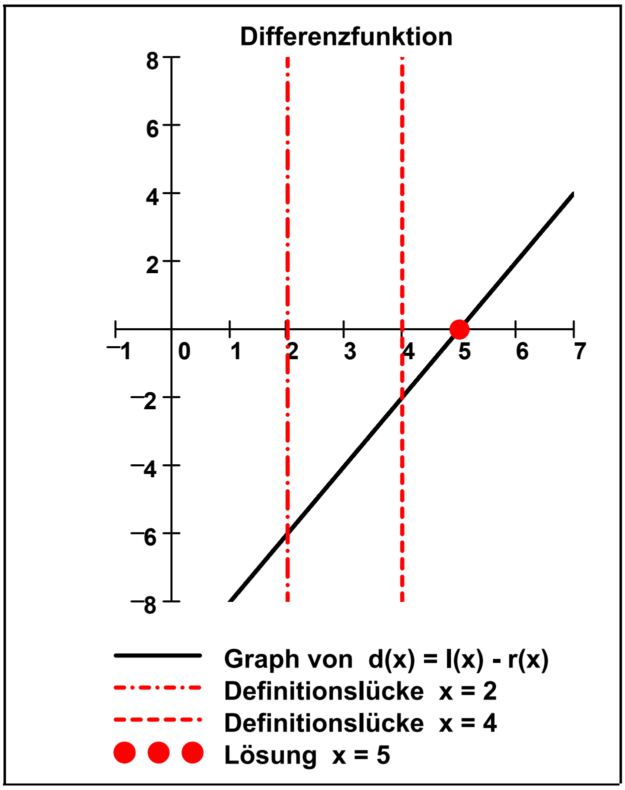
rechte Funktion: $r(x) := x-2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$ vereinfachen $\rightarrow 2 \cdot x - 10$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad$ $d(x) = 0$ auflösen, $x \rightarrow 5$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2\cdot(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}$ $\quad$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$

Lösung: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2\cdot(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}$ auflösen, $x \rightarrow 0$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{0\}$

Durch Multilpizieren mit dem Hauptnenner Umformung der Bruchgleichung in eine lineare Gleichung:

$2\cdot(x+2) + (x-2) = 2 \rightarrow 3\cdot x + 2 = 2$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

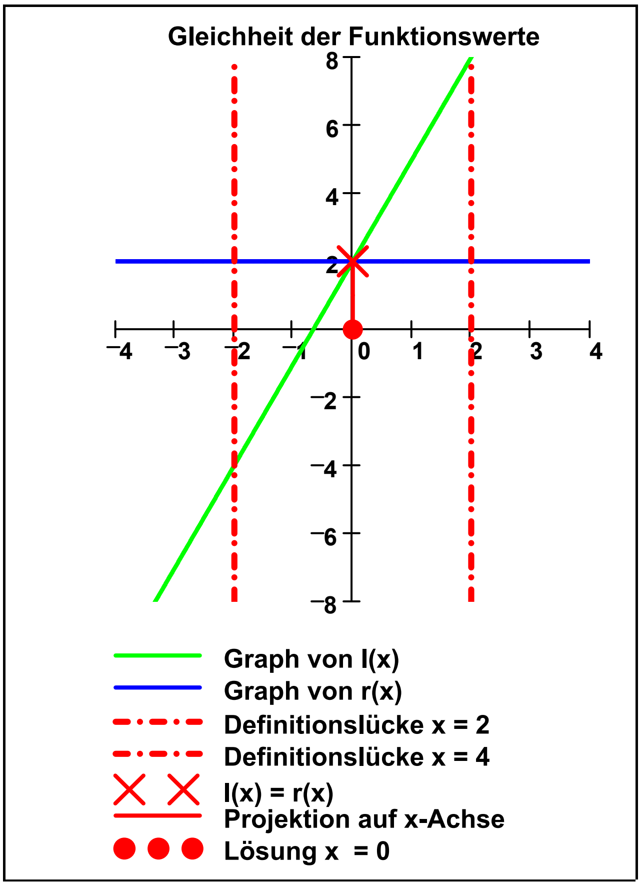
linke Funktion: $l(x) := 3\cdot x + 2$

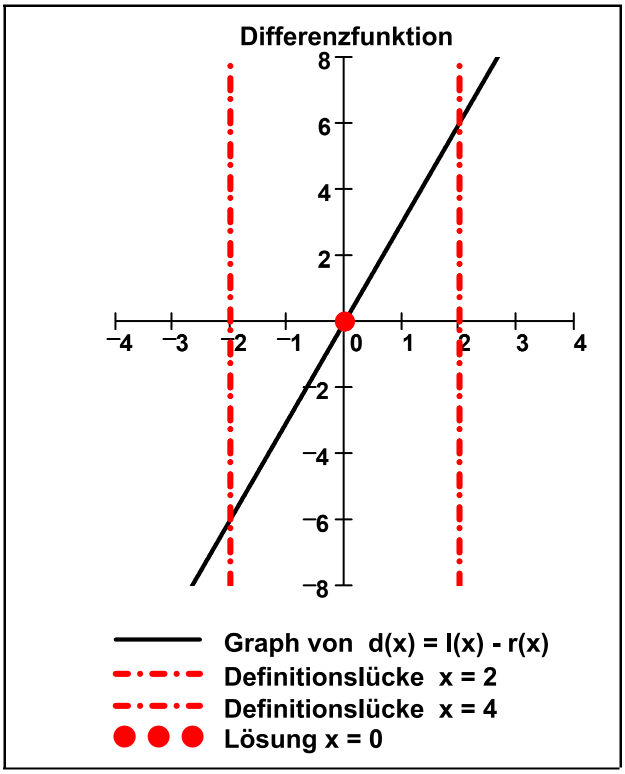
rechte Funktion: $r(x) := 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad$ $d(x) = 0$ auflösen, $x \rightarrow 0$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{2\cdot x}{x^2-9}$$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

Lösung: $$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{2\cdot x}{x^2-9} \text{ auflösen}, x \rightarrow x$$ $\mathbb{L} = \mathbb{D}$

Durch Multilpizieren mit dem Hauptnenner Umformung der Bruchgleichung in eine lineare Gleichung:

$(x+3)+(x-3)=2\cdot x \rightarrow 2\cdot x = 2\cdot x$ also eine Identität

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

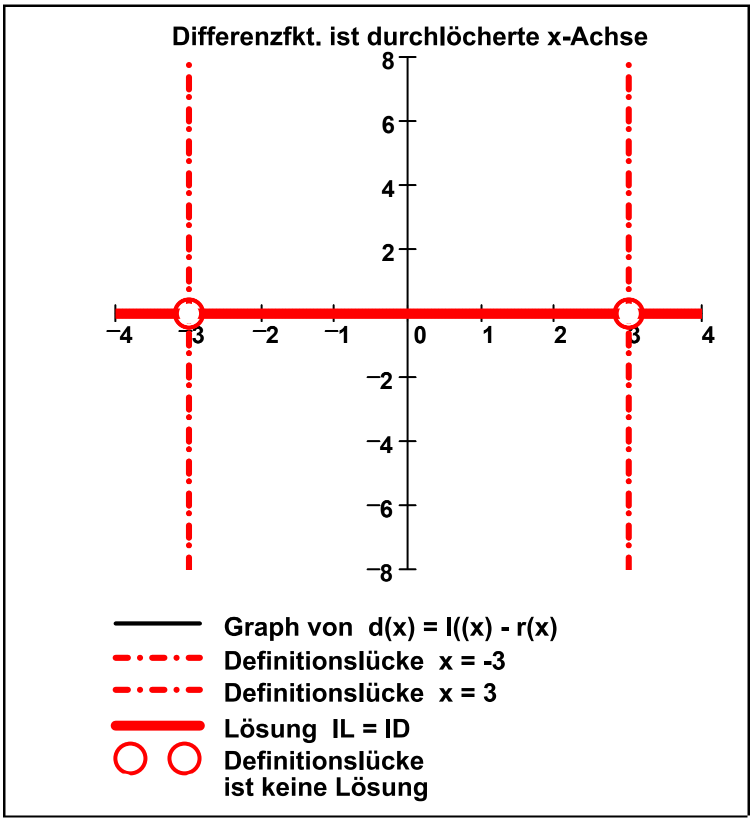
linke Funktion: $l(x) := 2\cdot x$

rechte Funktion: $r(x) := 2\cdot x$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x}$ $\quad$ **ID = IR\ { −1 ; 0 ; 1}**

Lösung: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x}$ auflösen, x $\rightarrow$ $\quad$ **IL = { }**

Durch Multilpizieren mit dem Hauptnenner Umformung der Bruchgleichung in eine quadratische Gleichung:

$$x \cdot (x+1) + x \cdot (x-1) = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

linke Funktion: $l(x) := x \cdot (x+1) + x \cdot (x-1)$

rechte Funktion: $r(x) := 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$ vereinfachen $\rightarrow 2$

Graphische Lösung der Gleichung: