EL / GS - 23.08.05 - e1_trigGl.mcd

Goniometrische Gleichungen

Definition:
Gleichungen, in denen die Variable als Argument von Winkelfunktionen vorkommen, nennt man "goniometrische Gleichungen".

Lösungsweg:
Mit Hilfe der Formeln der Formelsammlung Seite 38 bis 39 lässt sich in vielen Fällen eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung finden, deren Lösungsmenge unmittelbar angegeben werden kann. Durch die Vielfalt bei goniometrischen Gleichungen können nur für einfache ausgewählte Typen systematische Verfahren angegeben werden.
Es sind dies z.B.:

(1) Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion
(2) Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen desselben Arguments
(3) Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen verschiedener Argumente

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichungstyp (1): $\sin(x) + \sin(2\cdot x) = 0$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Ersetzen des Terms mit doppeltem Arg. mit Hilfe des Additionstheorems:

Umformung von $\sin(2\cdot x)$ **entwickeln**, $x \rightarrow 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \Rightarrow$

Einsetzen: $\sin(x) + 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$

Ausklammern: $\sin(x)\cdot(1 + 2\cdot\cos(x)) = 0$

Lösungsmenge Fall 1: $\sin(x) = 0$

$\sin(x) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 0$

Standardwerte in $[0 ; 2\pi]$ $x_{L11} := 0$ $x_{L12} := \pi$ $x_{L13} := 2\cdot\pi$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ k ∈ Z (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L1}(k) := x_{L11} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L2}(k) := x_{L12} + k\cdot 2\cdot\pi$

Lösungsmenge Fall 2: $1 + 2\cdot\cos(x) = 0$

$1 + 2\cdot\cos(x) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\pi$

Standardwerte in $[0 ; 2\pi]$ $x_{L21} := \frac{2}{3}\cdot\pi$ $x_{L22} := -x_{L21}$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ k ∈ Z (k kann beliebig gewählt werden)

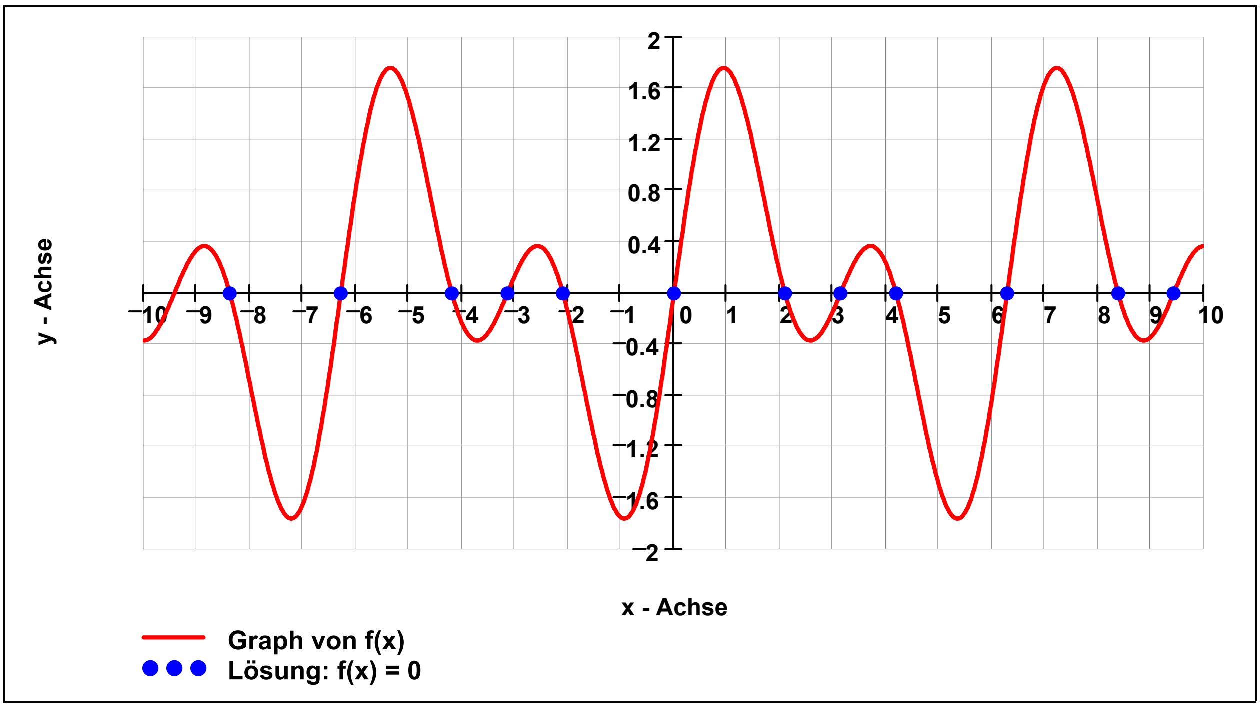
$x_{L3}(k) := x_{L21} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L4}(k) := x_{L22} + k\cdot 2\cdot\pi$

Ausgabe der Lösungen:

$x_{L1}(k) =$	$x_{L2}(k) =$	$x_{L3}(k) =$	$x_{L4}(k) =$
-6.283	-3.142	-4.189	-8.378
0	3.142	2.094	-2.094
6.283	9.425	8.378	4.189

Teilaufgabe b) **Darstellung der goniometrischen Gleichung durch den Graph einer trigonometrischen Funktion:**

$f(x) := \sin(x) + \sin(2 \cdot x)$



Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichungstyp (2): $\cos(x)^3 - 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)^2 = 0$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Reduzieren auf eine Winkelfunktion mit Hilfe des trigonom. Pythagoras:

Ausklammern: $\cos(x)\cdot\left(\cos(x)^2 - 2\cdot\sin(x)^2\right) = 0$

Umformung von $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Einsetzen: $\cos(x)\cdot\left[\cos(x)^2 - 2\cdot\left(1 - \cos(x)^2\right)\right] = 0$

Vereinfachen: $\cos(x)\cdot\left(3\cdot\cos(x)^2 - 2\right) = 0$

Lösungsmenge Fall 1: $\cos(x) = 0$

$\cos(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$

Standardwerte in **[0 ; 2 π]** $x_{L11} := \frac{1}{2}\cdot\pi$ $x_{L12} := -\frac{\pi}{2}$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ k ∈ Z (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L1}(k) := x_{L11} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L2}(k) := x_{L12} + k\cdot 2\cdot\pi$

Lösungsmenge Fall 2: $3\cdot\cos(x)^2 - 2 = 0$

$$3\cdot\cos(x)^2 - 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) \\ \pi - \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) \end{pmatrix}$$

Standardwerte in **[0 ; 2 π]** $x_{L21} := \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)$ $x_{L22} := -x_{L21}$

$x_{L31} := \pi - \operatorname{acos}\left(\frac{1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)$ $x_{L32} := -x_{L21}$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L3}(k) := x_{L21} + k \cdot 2 \cdot \pi$ $x_{L4}(k) := x_{L22} + k \cdot 2 \cdot \pi$

$x_{L41} := \pi - \mathrm{acos}\left(\frac{1}{3} \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)$ $x_{L42} := -x_{L41}$

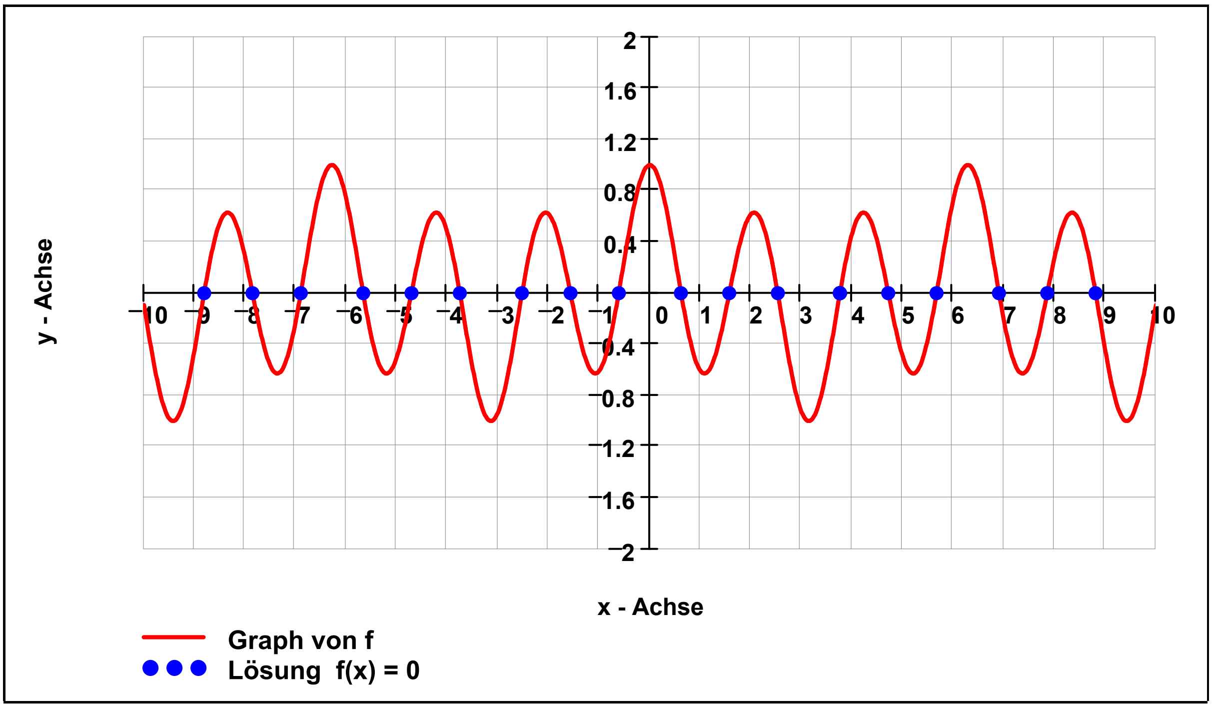
$x_{L5}(k) := x_{L41} + k \cdot 2 \cdot \pi$ $x_{L6}(k) := x_{L42} + k \cdot 2 \cdot \pi$

Ausgabe der Lösungen:

$x_{L1}(k) =$	$x_{L2}(k) =$	$x_{L3}(k) =$	$x_{L4}(k) =$	$x_{L5}(k) =$	$x_{L6}(k) =$
-4.712	-7.854	-5.668	-6.899	-3.757	-8.809
1.571	-1.571	0.615	-0.615	2.526	-2.526
7.854	4.712	6.899	5.668	8.809	3.757

Teilaufgabe b) **Darstellung der goniometrischen Gleichung durch den Graph einer trigonometrischen Funktion:**

$f(x) := \cos(x)^3 - 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)^2$



Aufgabe 3:
a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichungstyp (3): $\sin(x) = \cos(2\cdot x)$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Ersetzen des Terms mit doppeltem Argum. mit Hilfe des Additionstheorems:

$$\cos(2\cdot x) = 1 - 2\cdot\sin(x)^2$$

Umformen liefert: $\sin(x) = 1 - 2\cdot\sin(x)^2$

quadratische Gleichung: $2\cdot\sin(x)^2 + \sin(x) - 1 = 0$

Substitution: $u = \sin(x)$

Einsetzen: $2\cdot u^2 + u - 1 = 0 \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösungsmenge Fall 1: $\sin(x) = -1$

$$\sin(x) = -1 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\pi$$

Standardwerte in $[\,0\,;\,2\,\pi\,]$ $x_{L11} := \frac{-1}{2}\cdot\pi$ $x_{L12} := -x_{L11} + \pi$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L1}(k) := x_{L11} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L2}(k) := x_{L12} + k\cdot 2\cdot\pi$

Lösungsmenge Fall 2: $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\pi$$

Standardwerte in $[\,0\,;\,2\,\pi\,]$ $x_{L21} := \frac{1}{6}\cdot\pi$ $x_{L22} := -x_{L21} + \pi$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L3}(k) := x_{L21} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L4}(k) := x_{L22} + k\cdot 2\cdot\pi$

<u>Ausgabe der Lösungen:</u> Probe:

$x_{L1}(k) = \begin{array}{|c|}\hline -7.854 \\ \hline -1.571 \\ \hline 4.712 \\ \hline \end{array}$ Lösung Lösung Lösung $\quad \sin(x_{L1}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \quad \cos(2 \cdot x_{L1}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$

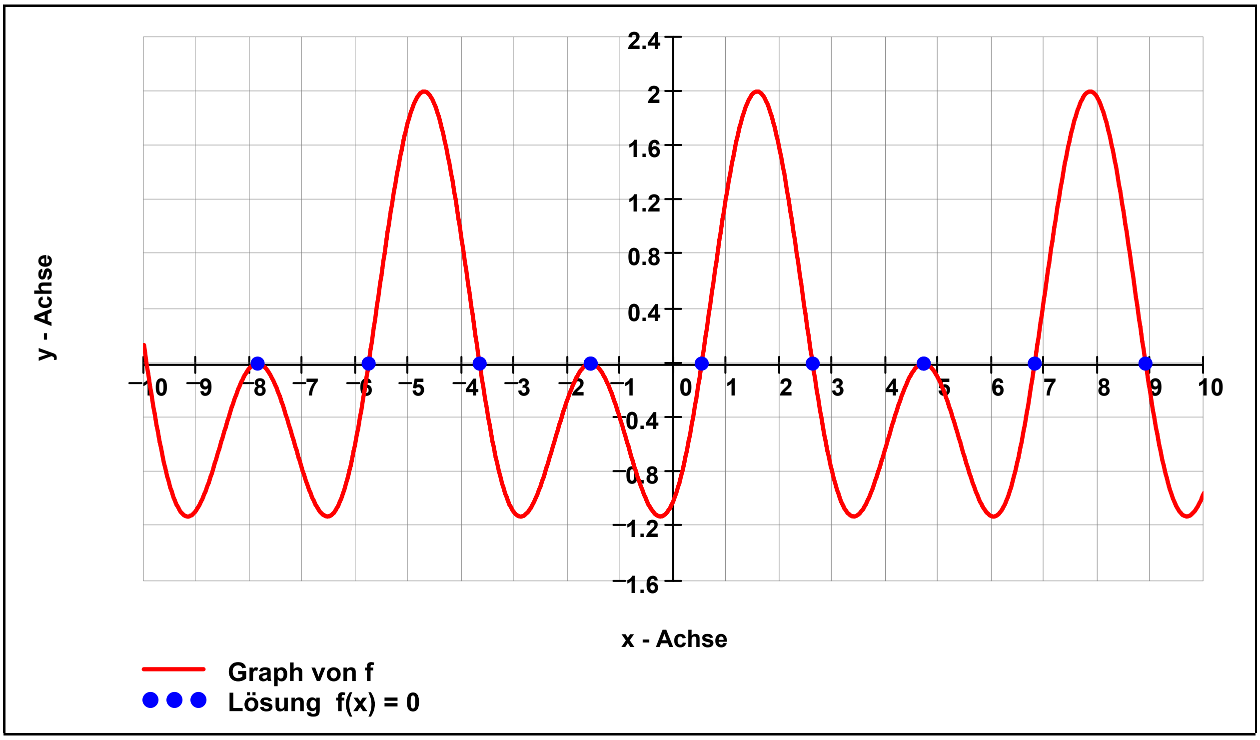
$x_{L2}(k) = \begin{array}{|c|}\hline -1.571 \\ \hline 4.712 \\ \hline 10.996 \\ \hline \end{array}$ Lösung Lösung Lösung $\quad \sin(x_{L2}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \quad \cos(2 \cdot x_{L2}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$

$x_{L3}(k) = \begin{array}{|c|}\hline -5.76 \\ \hline 0.524 \\ \hline 6.807 \\ \hline \end{array}$ Lösung Lösung Lösung $\quad \sin(x_{L3}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline \end{array} \quad \cos(2 \cdot x_{L3}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline \end{array}$

$x_{L2}(k) = \begin{array}{|c|}\hline -1.571 \\ \hline 4.712 \\ \hline 10.996 \\ \hline \end{array}$ Lösung Lösung Lösung $\quad \sin(x_{L4}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline \end{array} \quad \cos(2 \cdot x_{L4}(k)) = \begin{array}{|c|}\hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.5 \\ \hline \end{array}$

Teilaufgabe b) **Darstellung der goniometrischen Gleichung durch den Graph einer trigonometrischen Funktion:**

$$f(x) := \sin(x) - \cos(2 \cdot x)$$



Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichungstyp (1): $\cos(x) + 2\cdot\cos(x)^2 - 1 = 0$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Substitution und Lösen der quadratischen Gleichung.

Substitution: $u = \cos(x)$

$$2\cdot u^2 + u - 1 = 0 \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge Fall 1: $\cos(x) = -1$

$\cos(x) = -1$ auflösen, $x \rightarrow \pi$

Standardwerte in **[0 ; 2 π]** $x_{L11} := \pi$ $x_{L12} := -x_{L11}$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L1}(k) := \pi + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L2}(k) := -\pi + k\cdot 2\cdot\pi$

Lösungsmenge Fall 2: $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ auflösen, $x \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\pi$

Standardwerte in **[0 ; 2 π]** $x_{L21} := \frac{\pi}{3}$ $x_{L22} := -x_{L21}$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

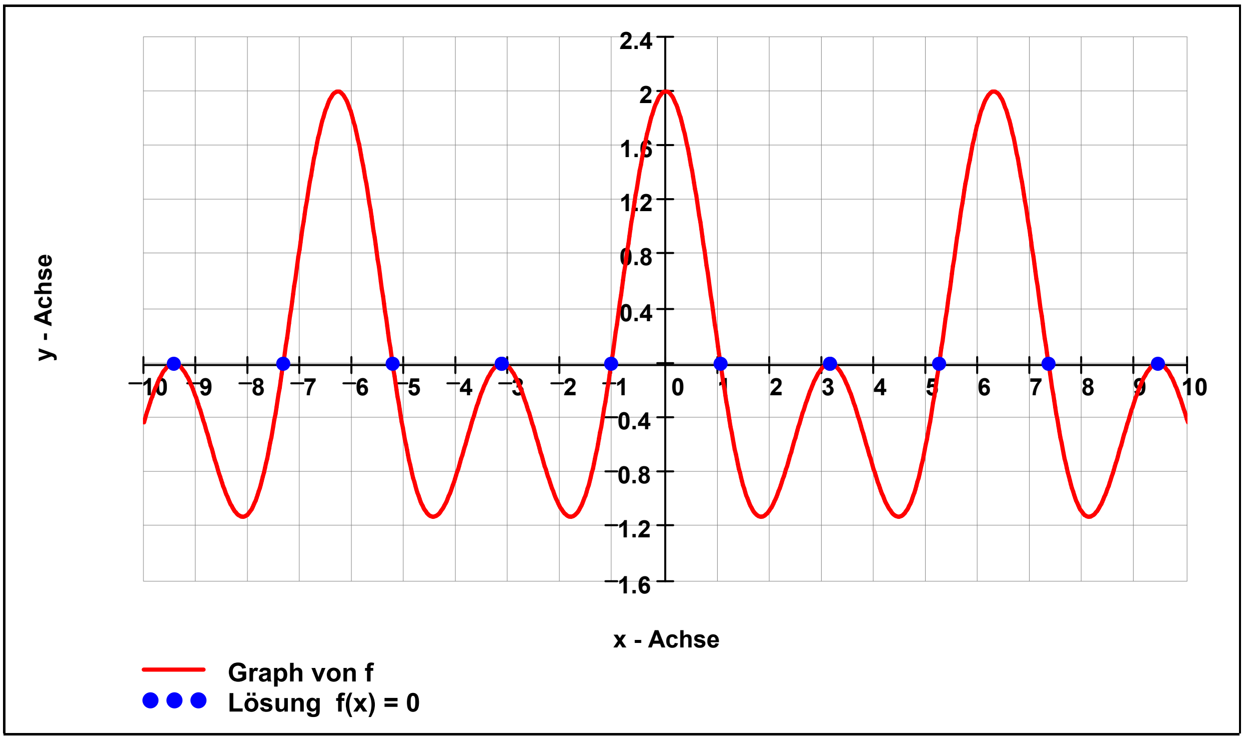
$x_{L3}(k) := x_{L21} + k\cdot 2\cdot\pi$ $x_{L4}(k) := x_{L22} + k\cdot 2\cdot\pi$

Ausgabe der Lösungen:

$x_{L1}(k) =$	$x_{L2}(k) =$	$x_{L3}(k) =$	$x_{L4}(k) =$
-3.142	-9.425	-5.236	-7.33
3.142	-3.142	1.047	-1.047
9.425	3.142	7.33	5.236

Teilaufgabe b) **Darstellung der goniometrischen Gleichung durch den Graph einer trigonometrischen Funktion:**

$f(x) := \cos(x) + 2 \cdot \cos(x)^2 - 1$



Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie von der gegebenen Gleichung die maximale Definitions- und die Lösungsmenge.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichungstyp (2): $1 - \sin(x) = \cos(x)$ $\quad$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Reduzieren auf eine Winkelfunktion mit Hilfe des trigonom. Pythagoras.

Substitution: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$

Einsetzen: $1 - \sin(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$

Quadrieren: $1 - 2\cdot\sin(x) + \sin(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$

Umformen liefert: $2\cdot\sin(x)^2 - 2\cdot\sin(x) = 0$

Ausklammern: $2\cdot\sin(x)\cdot(\sin(x) - 1) = 0$

Lösungsmenge Fall 1: $\sin(x) = 0$

$\sin(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0$

Standardwerte in $[\,0\,;\,2\,\pi\,]$ $\quad x_{L11} := 0 \quad x_{L12} := \pi \quad x_{L13} := 2\pi$

Allgemeine Lösung: $k := -1, 0 .. 1$ $\quad$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L1}(k) := x_{L11} + k\cdot 2\cdot\pi$ $\qquad$ $x_{L2}(k) := x_{L12} + k\cdot 2\cdot\pi$

Lösungsmenge Fall 2: $\sin(x) - 1 = 0$

$\sin(x) - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$

Standardwerte in $[\,0\,;\,2\,\pi\,]$ $\quad x_{L21} := \frac{1}{2}\cdot\pi$

$k := -1, 0 .. 2$ $\quad$ $k \in Z$ (k kann beliebig gewählt werden)

$x_{L3}(k) := x_{L21} + k\cdot 2\cdot\pi$

Ausgabe der Lösungen:

Probe:

$x_{L1}(k) =$		$1 - \sin(x_{L1}(k)) =$	$\cos(x_{L1}(k)) =$
-6.283	Lösung	1	1
0	Lösung	1	1
6.283	Lösung	1	1
12.566	Lösung	1	1

$x_{L2}(k) =$		$1 - \sin(x_{L2}(k)) =$	$\cos(x_{L2}(k)) =$
-3.142	keine Lösung	1	-1
3.142	keine Lösung	1	-1
9.425	keine Lösung	1	-1
15.708	keine Lösung	1	-1

$x_{L3}(k) =$		$1 - \sin(x_{L3}(k)) =$	$\cos(x_{L3}(k)) =$
-4.712	Lösung	0	0
1.571	Lösung	0	0
7.854	Lösung	0	0
14.137	Lösung	0	0

Teilaufgabe b) **Darstellung der goniometrischen Gleichung durch den Graph einer trigonometrischen Funktion:**

$$f(x) := 1 - \sin(x) - \cos(x)$$