GS - 23.08.05 - f1_expGl.mcd

Exponentialgleichungen

Definition:

Eine Gleichung der Form $b^x = a$ mit $a \in IR^+$ und $b \in IR^+ \setminus \{1\}$ heißt Exponentialgleichung.

Definition:

Die Lösung der Eponentialgleichung $b^x = a$ heißt "Logarithmus von a zur Basis b".

Schreibweise: $x = \log_b(a)$

Besondere Basen:

Basis b = 10 heißt "Dekadischer Logarithmus": $10^x = a \Leftrightarrow x = \log_{10}(a) = \lg(a)$

Basis b = e heißt "Natürlicher Logarithmus": $e^x = a \Leftrightarrow x = \log_e(a) = \ln(a)$

Basis b = 2 heißt "Zweier - Logarithmus": $2^x = a \Leftrightarrow x = \log_2(a) = \mathrm{lb}(a)$

Bestimmung der Lösungen: **Zur Anwendung kommen die**
- **Potenzgesetze: FS Seite 15 / C**
- **Monotoniegesetze für Potenzen: FS Seite 16 / B**
- **Rechengesetze für Logarithmen: FS Seite 16 / B**
- **Basisumrechnung in die "Taschenrechnerbasen" 10 bzw. e: FS Seite 16 / C**

Lösung:

(1) Bringe die Exponentialgleichung mit den Potenzrechenregeln auf die Form $A^x = B$

und löse nach x auf: $x = \log_A(B)$

(2) Stelle beide Seiten der Exponentialgleichung als Potenz derselben Basis dar und löse dann durch Gleichsetzen der Exponenten beider Seiten.

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $2^x = 3$ ID = IR

Lösungsweg: Logarithmieren und Basis umrechnen.

Lösung: $2^x = 3$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1.585$ $IL = \left\{ \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

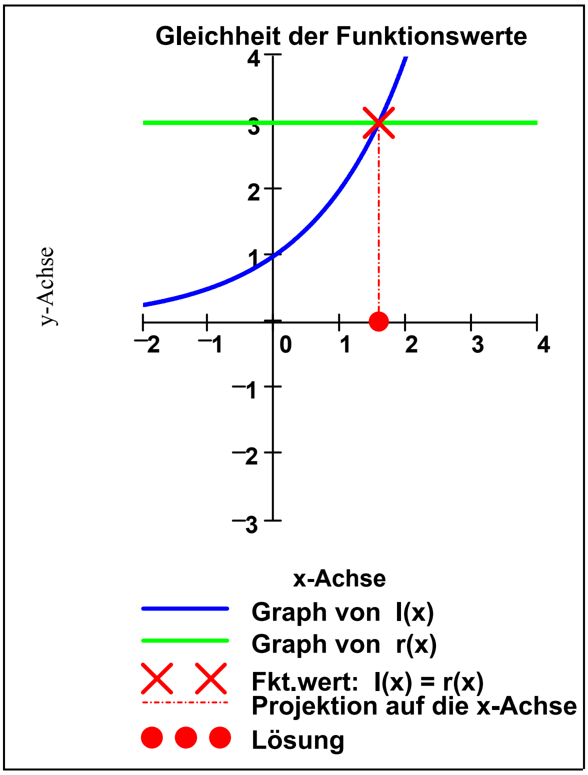
Linke Funktion: $l(x) := 2^x$

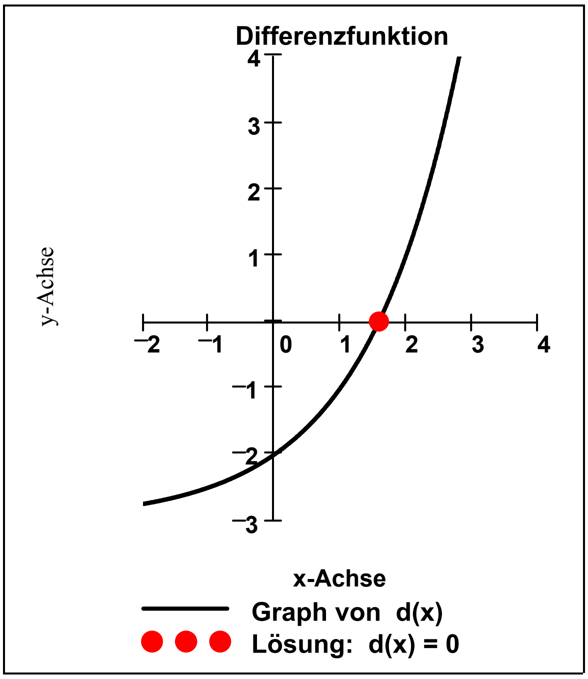
Rechte Funktion: $r(x) := 3$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 2^x - 3$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $2^{4\cdot x-7} = 3$ **ID = IR**

Lösungsweg : Substitution des Exponenten t = 4·x – 7, Logarithmieren und Basis umrechnen, Resubstitution und nach x auflösen.

Lösung: $2^{4\cdot x-7} = 3$ auflösen, x $\rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)} = 2.146$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)}\right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

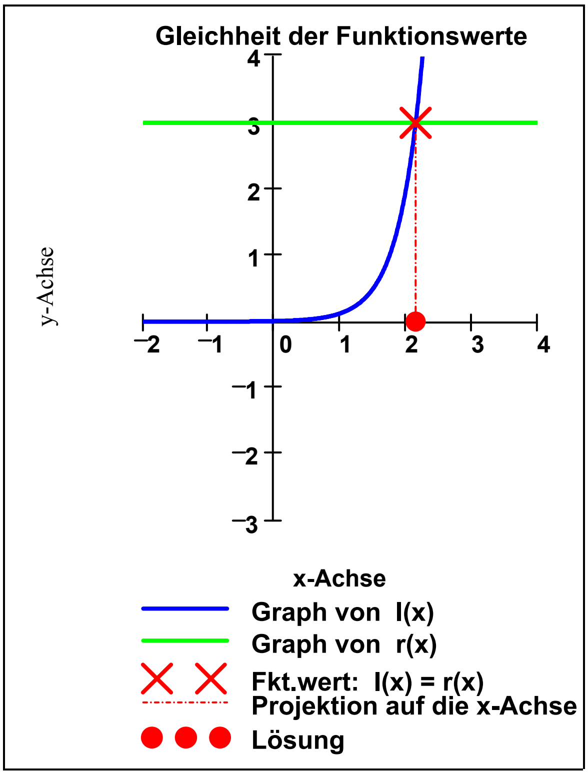
Linke Funktion: $l(x) := 2^{4\cdot x-7}$

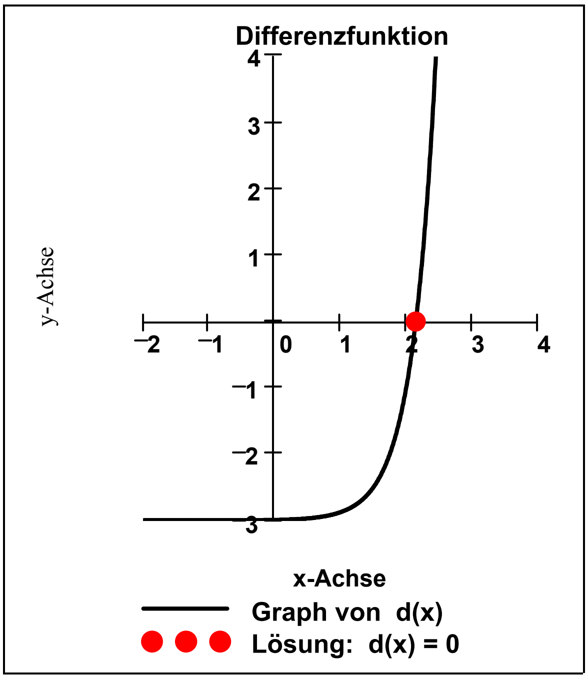
Rechte Funktion: $r(x) := 3$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 2^{4\cdot x-7} - 3$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: **d(x) = 0** $d(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $3^{2\cdot x} - 3^{x} = 2$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Substitution des Terms $t = 3^{x}$, quadratische Gleichung lösen, Resubstitution und nach x auflösen

Lösung: $3^{2\cdot x} - 3^{x} = 2 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} i\cdot\frac{\pi}{\ln(3)} \\ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.860i \\ 0.631 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := 3^{2\cdot x} - 3^{x}$

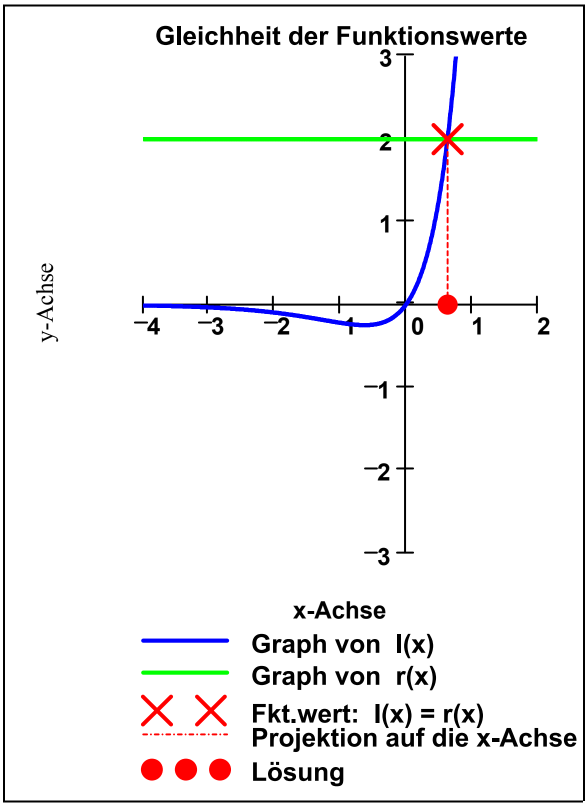
Rechte Funktion: $r(x) := 2$

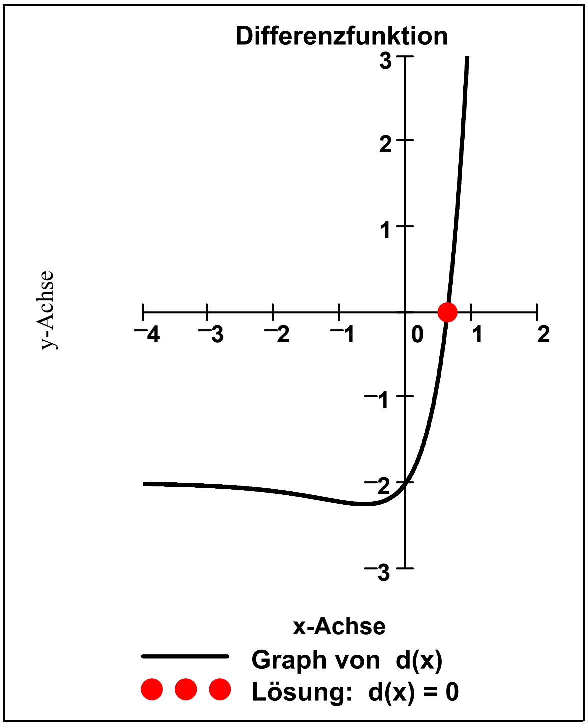
Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 3^{2\cdot x} - 3^{x} - 2$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$

$d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} i\cdot\frac{\pi}{\ln(3)} \\ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x} = 3^{x} - 3$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Substitution des Terms t = 3^x, gleichartige Terme zusammenfassen, quadratische Gleichung lösen, Resubstitution und nach x auflösen

Lösung: $2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x} = 3^{x} - 3$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\ln(2)}{\ln(3)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.631 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ $\quad$ IL = $\{ \frac{-\ln(2)}{\ln(3)} ; 1 \}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

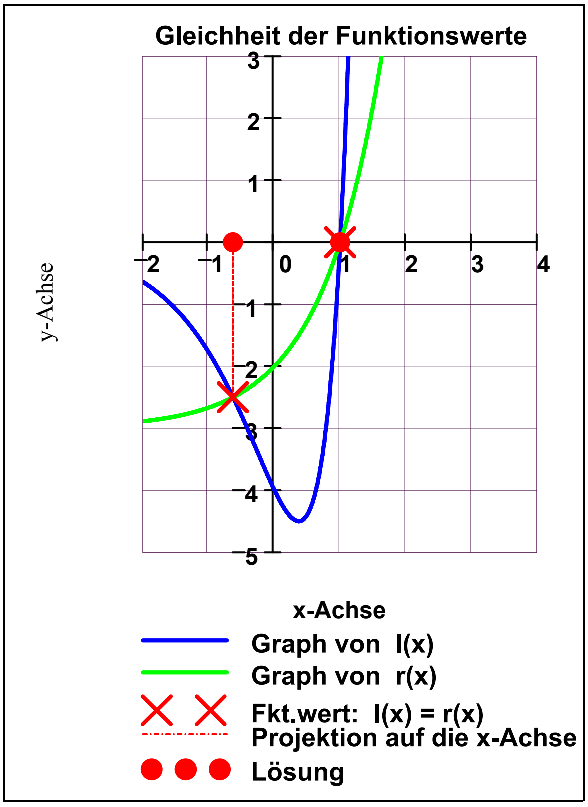
Linke Funktion: $l(x) := 2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x}$

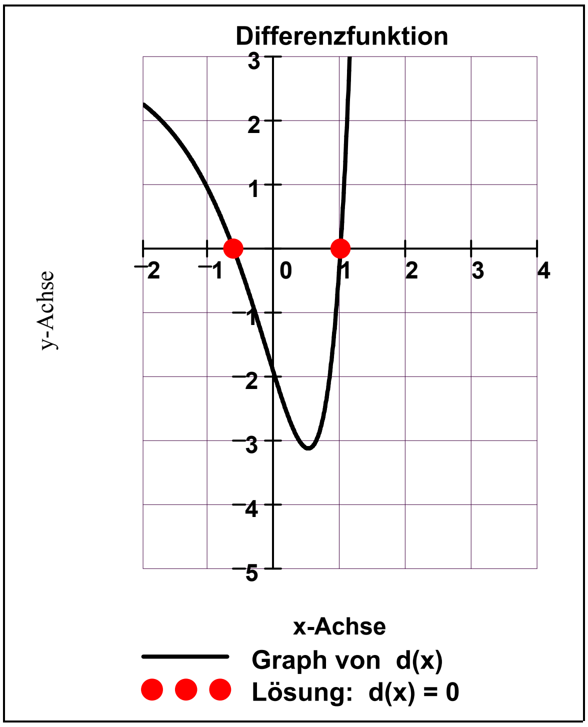
Rechte Funktion: $r(x) := 3^{x} - 3$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 7 \cdot 3^{x} + 3$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad$ $d(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\ln(2)}{\ln(3)} \\ 1 \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Aufspalten der Potenzen, x-Potenz und Zahlenpotenz separieren, Logarithmieren und Basis umrechnen.

Lösung: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{-\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$ $\quad$ $IL = \left\{ \dfrac{\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{3}{25}\right)} \right\}$

Aufspalten: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ erweitert auf $\frac{1}{5}\cdot\left(5^x\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot 3^x = 9\cdot 3^x$

Separieren: $\dfrac{25^x}{5} = 3^x\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{25^x}{3^x} = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$

Logarithmieren: $\left(\frac{25}{3}\right)^x = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{140}{3}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

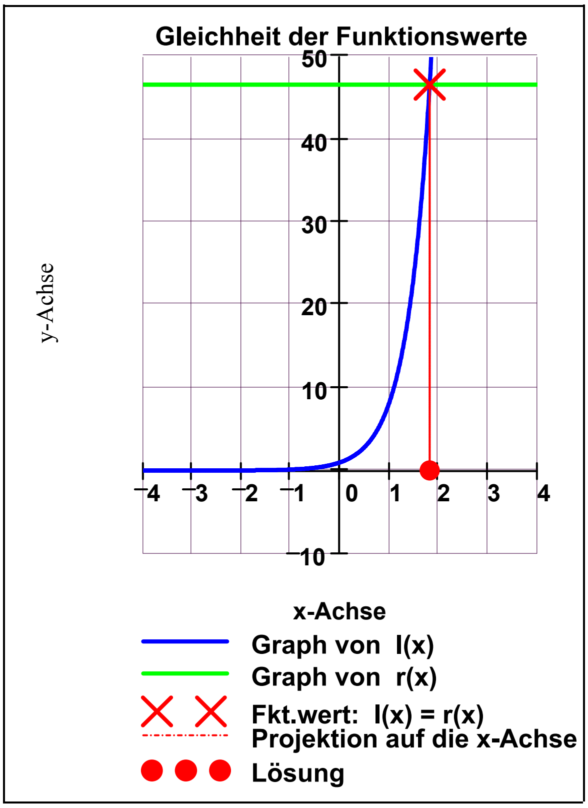
Linke Funktion: $l(x) := \left(\frac{25}{3}\right)^x$

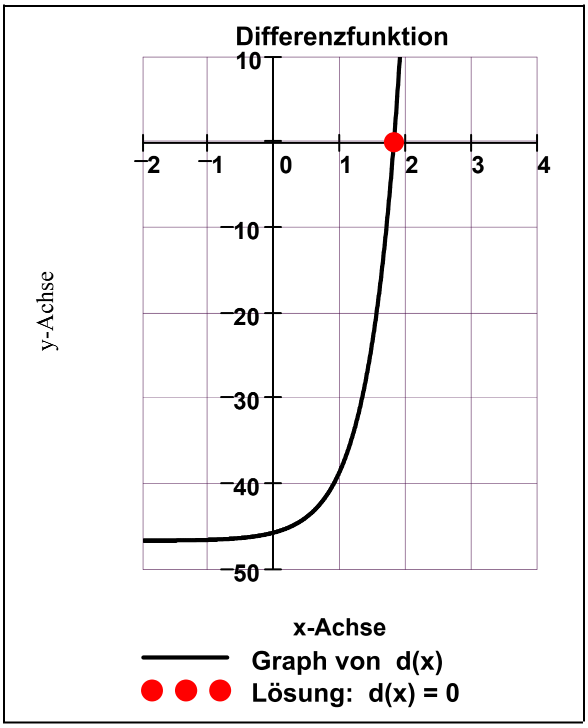
Rechte Funktion: $r(x) := 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x - \frac{140}{3}$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad$ $d(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{140}{3}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}$

Graphische Lösung der Gleichung: Variante A





Darstellung der Gleichung mit Funktionen: Variante B

Linke Funktion: $l(x) := 5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1}$

Rechte Funktion: $r(x) := 3^{x+2}$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} - 3^{x+2}$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$

$$d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{-\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$$

Graphische Lösung der Gleichung: Variante B