GS -23.08.05 - g1_logGl.mcd

Logarithmische Gleichungen

Definition:

Eine Gleichung der Form $\log_b(x) = a$ mit $x > 0$, $a \in IR$ und $b \in IR^+ \setminus \{1\}$ heißt Logarithmusgleichung.

Besondere Basen:

Basis $b = 10$ heißt Dekadischer Logarithmus: $10^x = a \Leftrightarrow x = \log_{10}(a) = \lg(a)$

Basis $b = e$ heißt Natürlicher Logarithmus: $e^x = a \Leftrightarrow x = \log_e(a) = \ln(a)$

Basis $b = 2$ heißt Zweier - Logarithmus: $2^x = a \Leftrightarrow x = \log_2(a) = \mathrm{lb}(a)$

Bestimmung der Lösungen: Zur Anwendung kommen die
- **Potenzgesetze: FS Seite 15 / C**
- **Monotoniegesetze für Potenzen: FS Seite 16 / B**
- **Rechengesetze für Logarithmen: FS Seite 16 / B**
- **Indentitäten:** $\log_b\left(b^x\right) = x$ **und** $b^{\log_b(|x|)} = |x|$ **mit** $x \neq 0$
- **Basisumrechnung in die "Taschenrechnerbasen" 10 bzw. e: FS Seite 16 / C**

Lösung:

(1) Bringe die Logarithmusgleichung durch Erheben in die Potenz zur Basis b in die Form

$$x = b^a$$

(2) Bei unterschiedlichen Basen stelle beide Seiten der Logarithmusgleichung als Logarithmus derselben Basis dar und löse dann wieder durch Potenzieren beider Seiten.

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Schreibweise in Mathcad: $\log_b(x)$ entspricht $\log(x, b)$.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\lg(3\cdot x+1)=-1$ $\qquad$ $\mathbb{D} = \left]-\frac{1}{3}\,;\,\infty\right[$

Lösungsweg: **Potenzieren.**

Lösung: $(3\cdot x+1)=10^{-1}$ auflösen, x $\rightarrow \frac{-3}{10}$ $\qquad$ $\mathbb{L} = \left\{\frac{-3}{10}\right\}$

Mathcad: $\log(3\cdot x+1,10)=-1$ auflösen, x $\rightarrow \frac{-3}{10}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

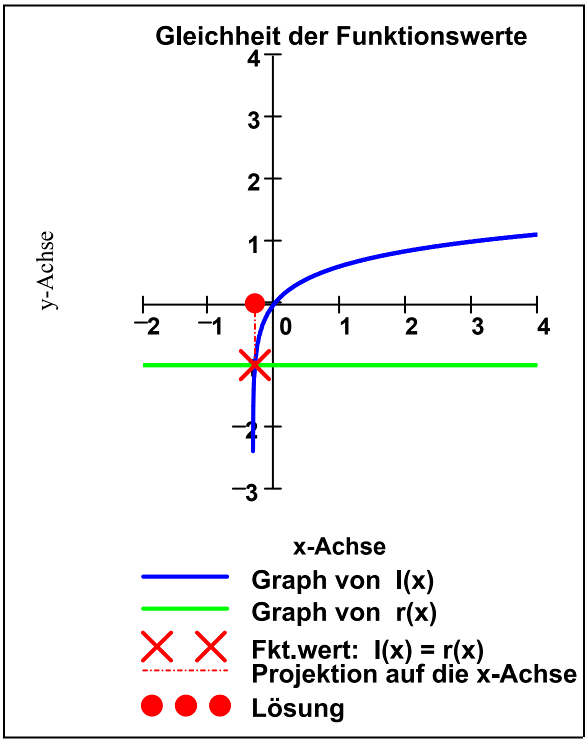
Linke Funktion: $l(x) := \log(3\cdot x+1,10)$

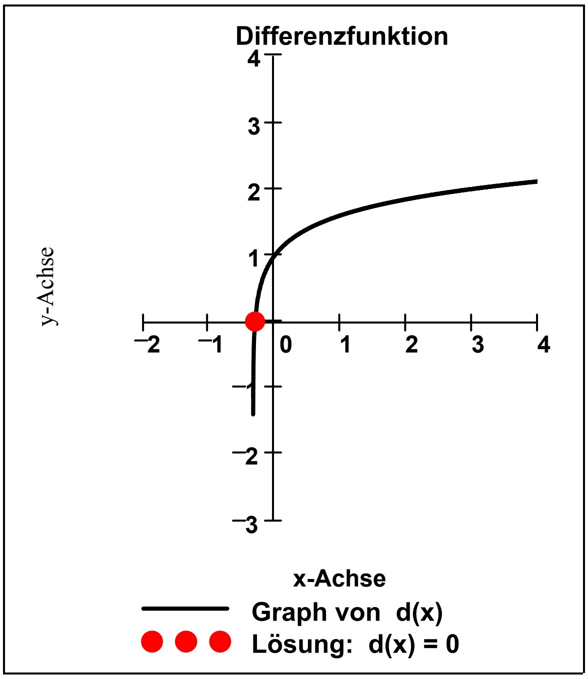
Rechte Funktion: $r(x) := -1$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x)-r(x) \rightarrow \frac{\ln(3\cdot x+1)}{\ln(10)}+1$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x)=0$ auflösen, x $\rightarrow \frac{-3}{10}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.

b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\log_5\left(x^2-1\right)=-1$ $\quad x^2-1>0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} x<-1 \\ 1<x \end{pmatrix}$ $\quad$ **ID = IR \ [−1 ; 1]**

Lösungsweg : Substitution des Arguments $t = x^2 - 1$, Potenzieren und Basis umrechnen, Resubstitution und nach x auflösen.

Lösung: $2^{4\cdot x-7}=3$ auflösen, $x \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)}=2.146$ $\quad \mathbb{L}=\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)}\right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

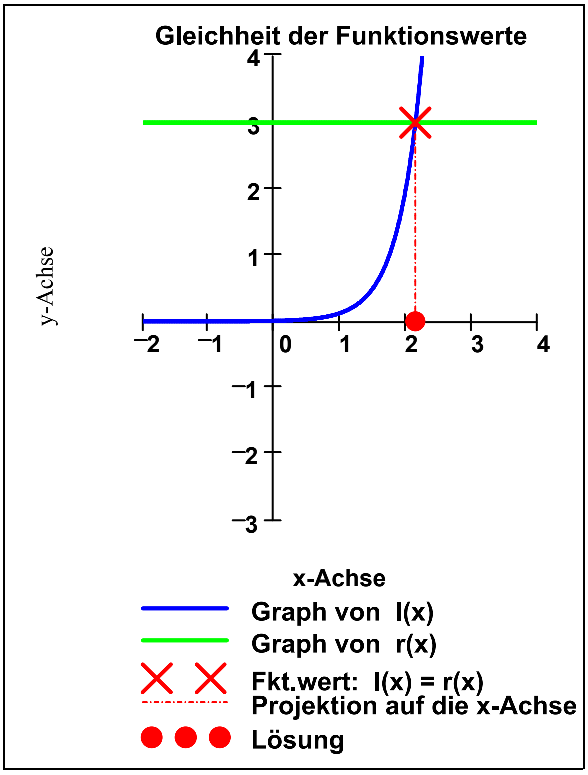
Linke Funktion: $l(x) := 2^{4\cdot x-7}$

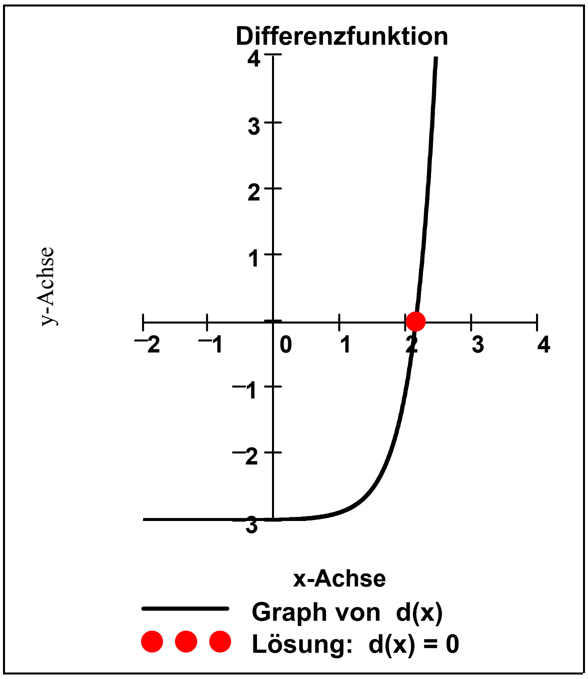
Rechte Funktion: $r(x) := 3$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 2^{4\cdot x-7} - 3$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad d(x)=0$ auflösen, $x \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln(384)}{\ln(2)}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $3^{2\cdot x} - 3^{x} = 2$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Substitution des Terms t = 3^{x}, quadratische Gleichung lösen, Resubstitution und nach x auflösen

Lösung: $3^{2\cdot x} - 3^{x} = 2 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} i\cdot\frac{\pi}{\ln(3)} \\ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.860i \\ 0.631 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

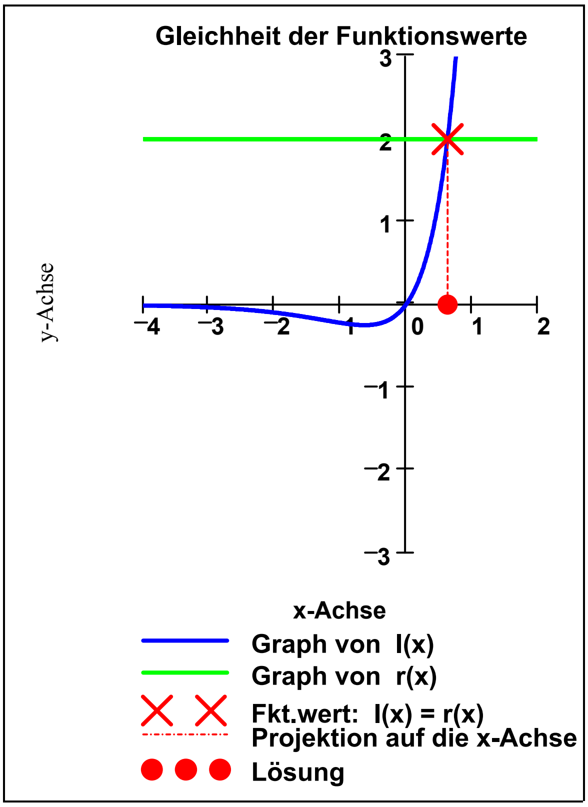
Linke Funktion: $l(x) := 3^{2\cdot x} - 3^{x}$

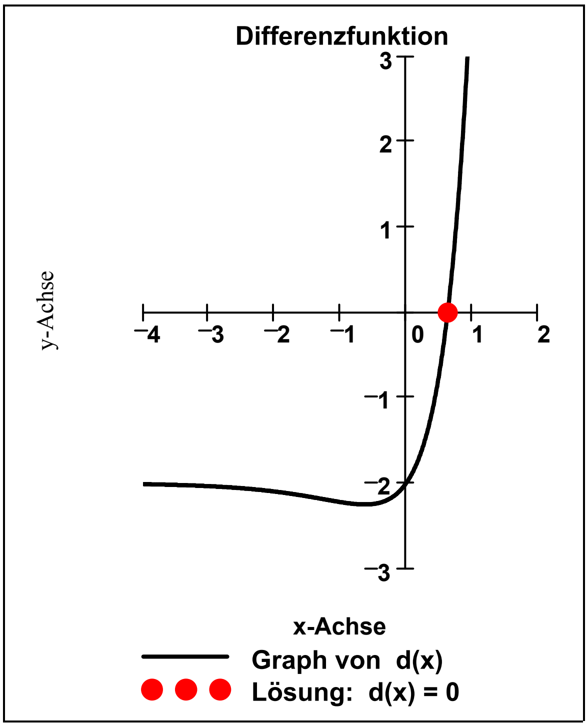
Rechte Funktion: $r(x) := 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 3^{2\cdot x} - 3^{x} - 2$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} i\cdot\frac{\pi}{\ln(3)} \\ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x} = 3^{x} - 3$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Substitution des Terms t = 3^x, gleichartige Terme zusammenfassen, quadratische Gleichung lösen, Resubstitution und nach x auflösen

Lösung: $2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x} = 3^{x} - 3 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\ln(2)}{\ln(3)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.631 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ **IL = { $\frac{-\ln(2)}{\ln(3)}$; 1 }**

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

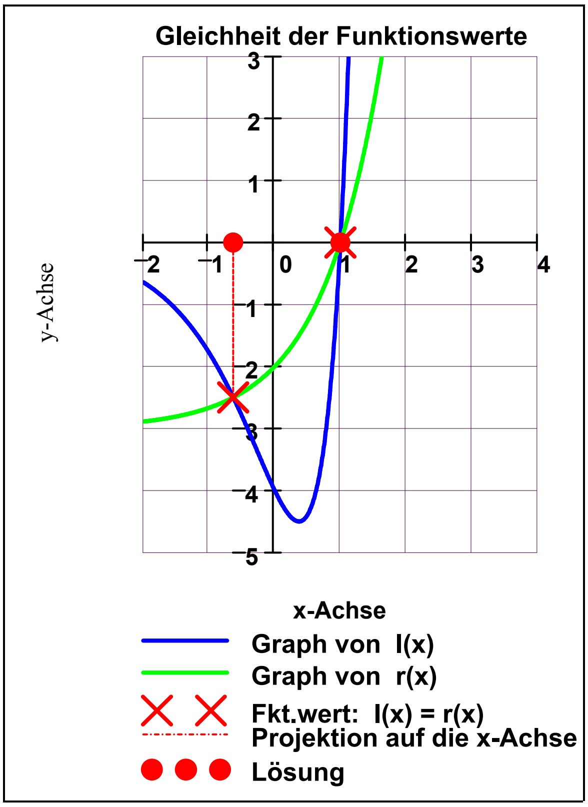
Linke Funktion: $l(x) := 2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 6 \cdot 3^{x}$

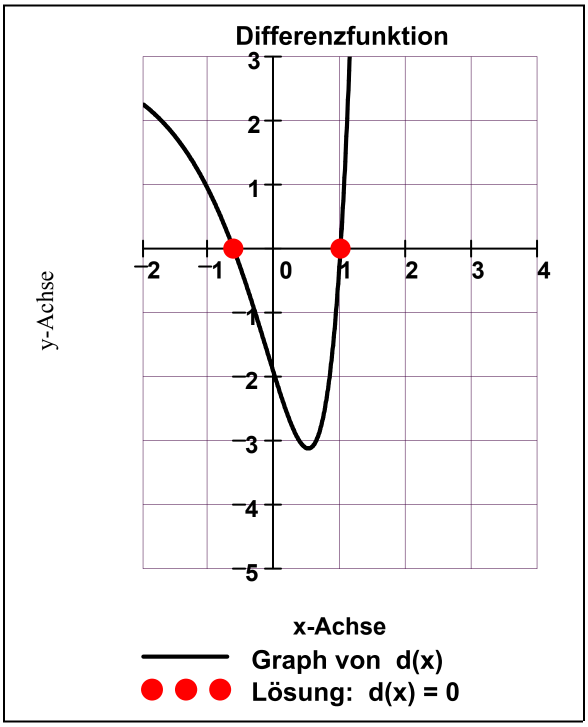
Rechte Funktion: $r(x) := 3^{x} - 3$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 2 \cdot 3^{2 \cdot x} - 7 \cdot 3^{x} + 3$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\ln(2)}{\ln(3)} \\ 1 \end{pmatrix}$

Graphische Lösung der Gleichung:





Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ **ID = IR**

Lösungsansatz: Aufspalten der Potenzen, x-Potenz und Zahlenpotenz separieren, Logarithmieren und Basisumrechnen.

Lösung: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{-\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$ $\quad IL = \left\{ \dfrac{\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{3}{25}\right)} \right\}$

Aufspalten: $5^{2\cdot x-1} - 3^{x-1} = 3^{x+2}$ erweitert auf $\frac{1}{5}\cdot\left(5^x\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot 3^x = 9\cdot 3^x$

Separieren: $\dfrac{25^x}{5} = 3^x\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{25^x}{3^x} = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$

Logarithmieren: $\left(\frac{25}{3}\right)^x = 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{140}{3}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

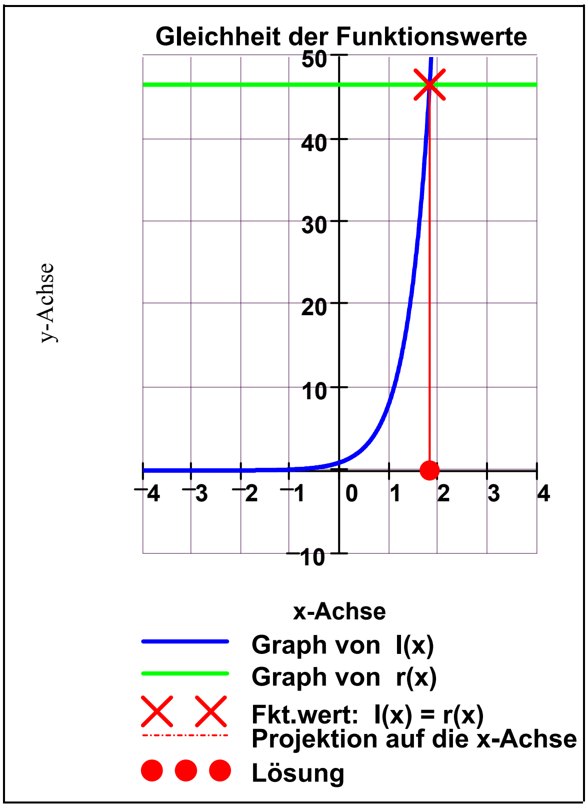
Linke Funktion: $l(x) := \left(\frac{25}{3}\right)^x$

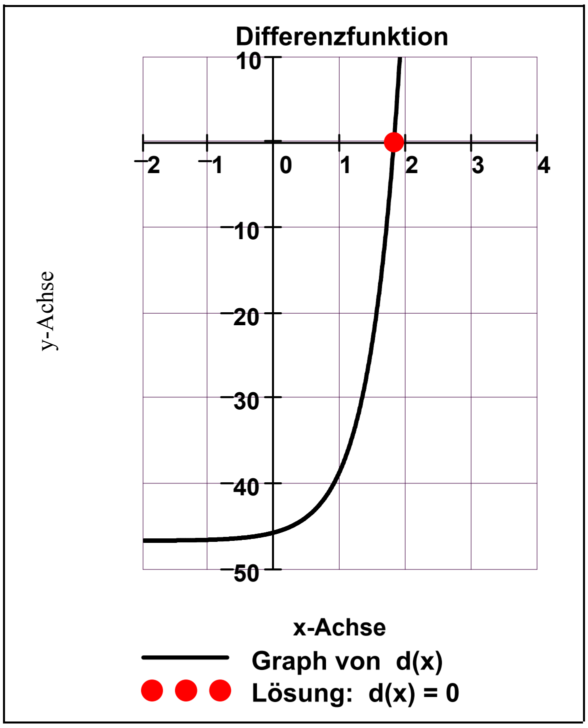
Rechte Funktion: $r(x) := 5\cdot\left(9+\frac{1}{3}\right)$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x - \frac{140}{3}$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$ $\quad d(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{140}{3}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}$

Graphische Lösung der Gleichung: Variante A





Darstellung der Gleichung mit Funktionen: Variante B

Linke Funktion: $l(x) := 5^{2 \cdot x-1} - 3^{x-1}$

Rechte Funktion: $r(x) := 3^{x+2}$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) \rightarrow 5^{2 \cdot x-1} - 3^{x-1} - 3^{x+2}$

Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0$

$$d(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{-\ln\left(\frac{3}{140}\right)}{\ln\left(\frac{25}{3}\right)} = 1.813$$

Graphische Lösung der Gleichung: Variante B