



Betragsgleichungen

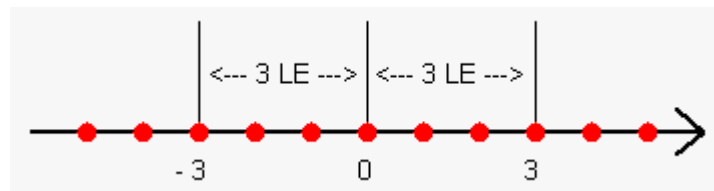
Definition:

Betrag einer Zahl: $|a| = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a = 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$

Betrag eines Terms: $|a - b| = \begin{cases} (a - b) & \text{if } a > b \\ 0 & \text{if } a = b \\ (b - a) & \text{if } a < b \end{cases}$

Anschaulich kann man unter $|a|$ die Maßzahl des Abstandes der Zahl a vom Nullpunkt der Zahlengeraden verstehen.

$$|-3| = 3 \quad \wedge \quad |3| = 3$$



Anschaulich kann man unter $|a - b|$ den Abstand zwischen den Zahlen a und b verstehen.

Kommen in einer Gleichung oder Ungleichung Betragsterme vor, so müssen diese mit Hilfe einer Fallunterscheidung erst aufgelöst werden, bevor die endgültige Gleichung oder Ungleichung gelöst werden kann.

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $|2 \cdot x| = 6$ ID = IR

Lösungsweg: **Auflösen des Betrags. Lösen der linearen Gleichung.**

Lösung:

1. Fall: $2 \cdot x > 0$ auflösen, $x \rightarrow 0 < x \Rightarrow 2 \cdot x = 6$ auflösen, $x \rightarrow 3$ $IL_1 = \{ 3 \}$

2. Fall: $2 \cdot x < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 0 \Rightarrow -(2 \cdot x) = 6$ auflösen, $x \rightarrow -3$ $IL_2 = \{ -3 \}$

\Rightarrow $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{ -3; 3 \}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

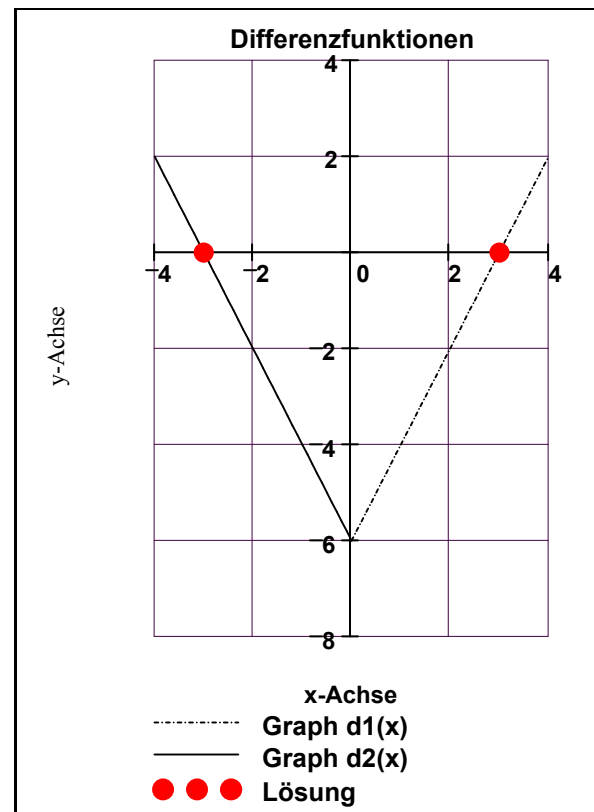
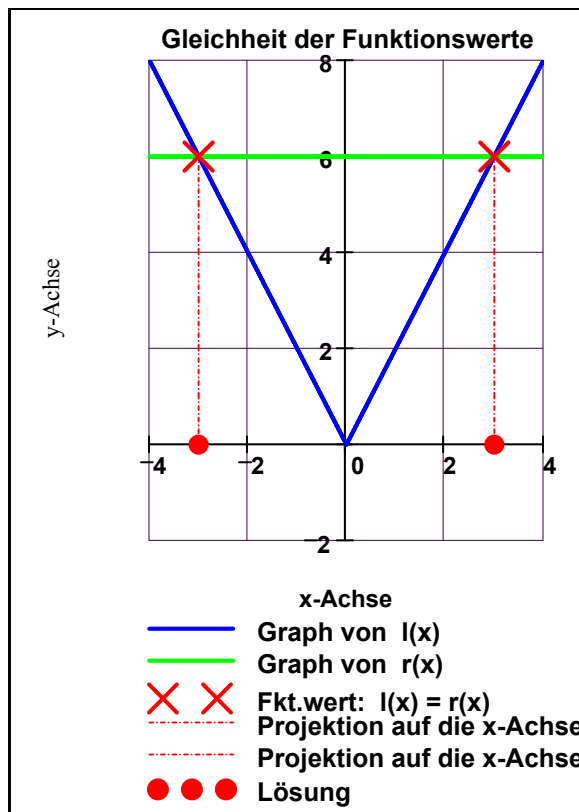
Linke Funktion:
$$l(x) := \begin{cases} (2 \cdot x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ (-2 \cdot x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Rechte Funktion: $r(x) := 6$

Differenzfunktionen: $d1(x) := 2 \cdot x - r(x) \rightarrow 2 \cdot x - 6$ $d2(x) := (-2 \cdot x - r(x)) \rightarrow -2 \cdot x - 6$



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $|4 - x| = 3$ ID = IR

Lösungsweg: Auflösen des Betrags. Lösen der linearen Gleichung.

Lösung:

1. Fall: $4 - x > 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 4 \Rightarrow 4 - x = 3$ auflösen, $x \rightarrow 1$ $IL_1 = \{ 1 \}$

2. Fall: $4 - x < 0$ auflösen, $x \rightarrow 4 < x \Rightarrow -(4 - x) = 3$ auflösen, $x \rightarrow 7$ $IL_2 = \{ 7 \}$

\Rightarrow $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{ 1; 7 \}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

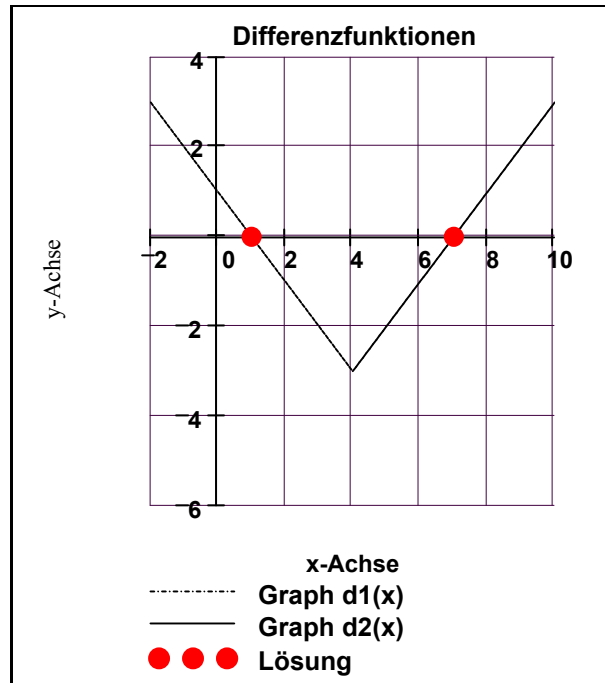
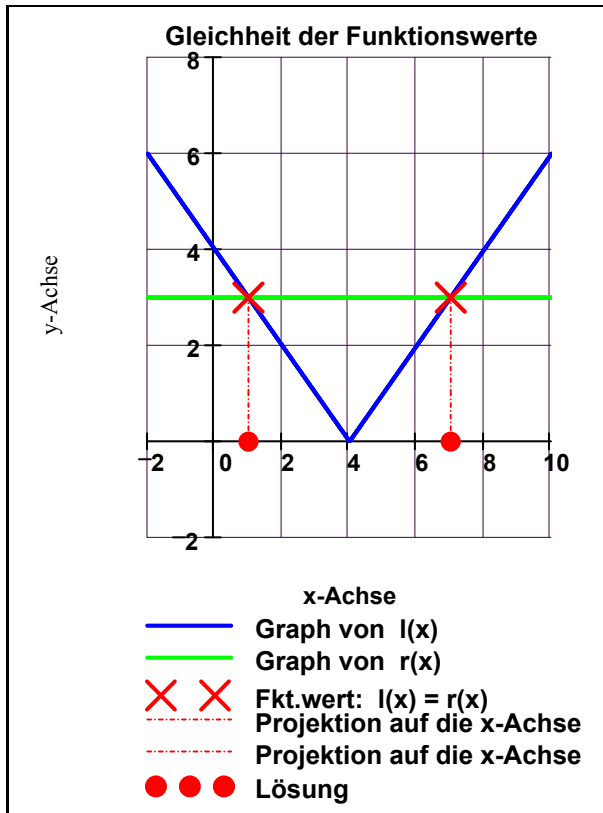
Linke Funktion:
$$l(x) := \begin{cases} (4 - x) & \text{if } x < 4 \\ 4 & \text{if } x = 0 \\ (x - 4) & \text{if } x > 4 \end{cases}$$

Rechte Funktion: $r(x) := 3$

Differenzfunktionen: $d1(x) := 4 - x - r(x) \rightarrow 1 - x$ $d2(x) := x - 4 - r(x) \rightarrow x - 7$



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge \mathbb{R} .
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $|x| + |x - 2| = 4$ ID = \mathbb{R}

Lösungsweg: Auflösen der beiden Beträge. Lösen der lin. Gleichung mit Fallunterscheidung

Lösung:

1. Fall: $x \geq 0$ $\Rightarrow x \geq 2$
 und $x - 2 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow 2 \leq x$
 $\Rightarrow x + (x - 2) = 4$ auflösen, $x \rightarrow 3$ $\Rightarrow IL_1 = \{ 3 \}$

2. Fall: $x \leq 0$ $\Rightarrow x \leq 0$
 und $x - 2 < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 2$
 $\Rightarrow -x - (x - 2) = 4$ auflösen, $x \rightarrow -1$ $\Rightarrow IL_2 = \{ -1 \}$

3. Fall: $x > 0$ $\Rightarrow 0 < x < 2$
 und $x - 2 < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < 2$
 $\Rightarrow x - (x - 2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4$ $\Rightarrow IL_3 = \{ \}$

4. Fall: $x < 0$ \Rightarrow Widerspruch
 und $x - 2 > 0$ auflösen, $x \rightarrow 2 < x$

$\Rightarrow IL = IL_1 \cup IL_2 \cup IL_3 = \{ -1; 3 \}$

Teilaufgabe b)

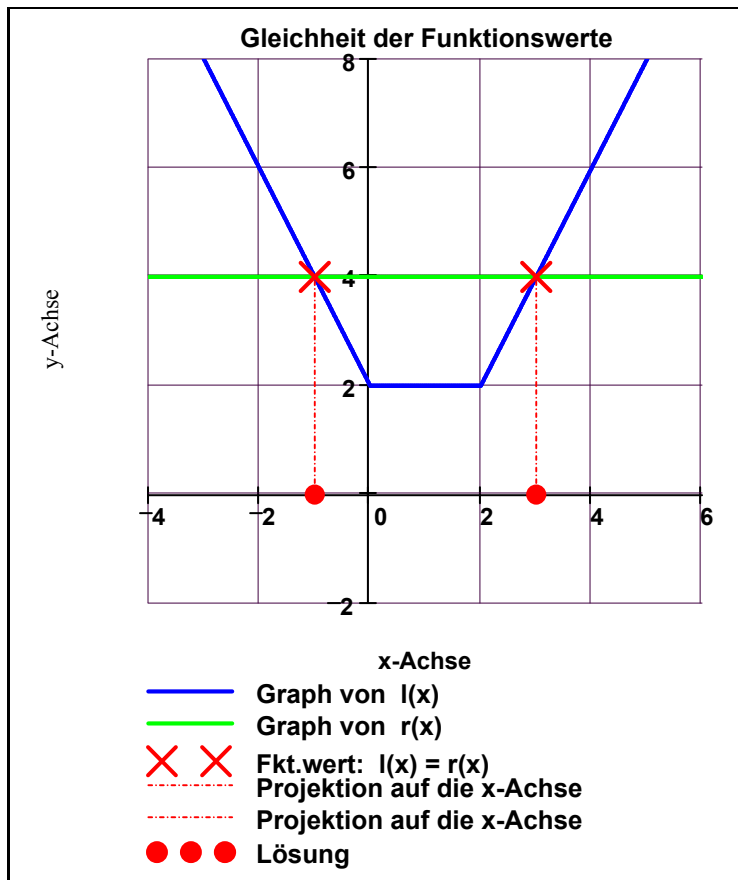
Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} (2 \cdot x - 2) & \text{if } x \geq 2 \\ (-2 \cdot x + 2) & \text{if } x \leq 0 \\ 2 & \text{if } 0 < x < 2 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 4$



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 4:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge \mathbb{R} .
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\left| \frac{x-3}{x+2} \right| = 4$ $ID = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Lösungsweg: **Auflösen des Betrags. Lösen der Bruchgleichung mit Fallunterscheidung.**

Lösung:

1. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} x < -2 \\ 3 \leq x \end{pmatrix} \Rightarrow x < -2 \vee x \geq 3$

$\Rightarrow \frac{x-3}{x+2} = 4$ auflösen, $x \rightarrow \frac{-11}{3} = -3.667 \Rightarrow IL_1 = \left\{ \frac{-11}{3} \right\}$

2. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 < x \\ x \leq 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -2 < x \leq 3$

$\Rightarrow \frac{3-x}{x+2} = 4$ auflösen, $x \rightarrow -1 \Rightarrow IL_2 = \{-1\}$

$\Rightarrow IL = IL_1 \cup IL_2 = \left\{ \frac{-11}{3}; -1 \right\}$

Teilaufgabe b)

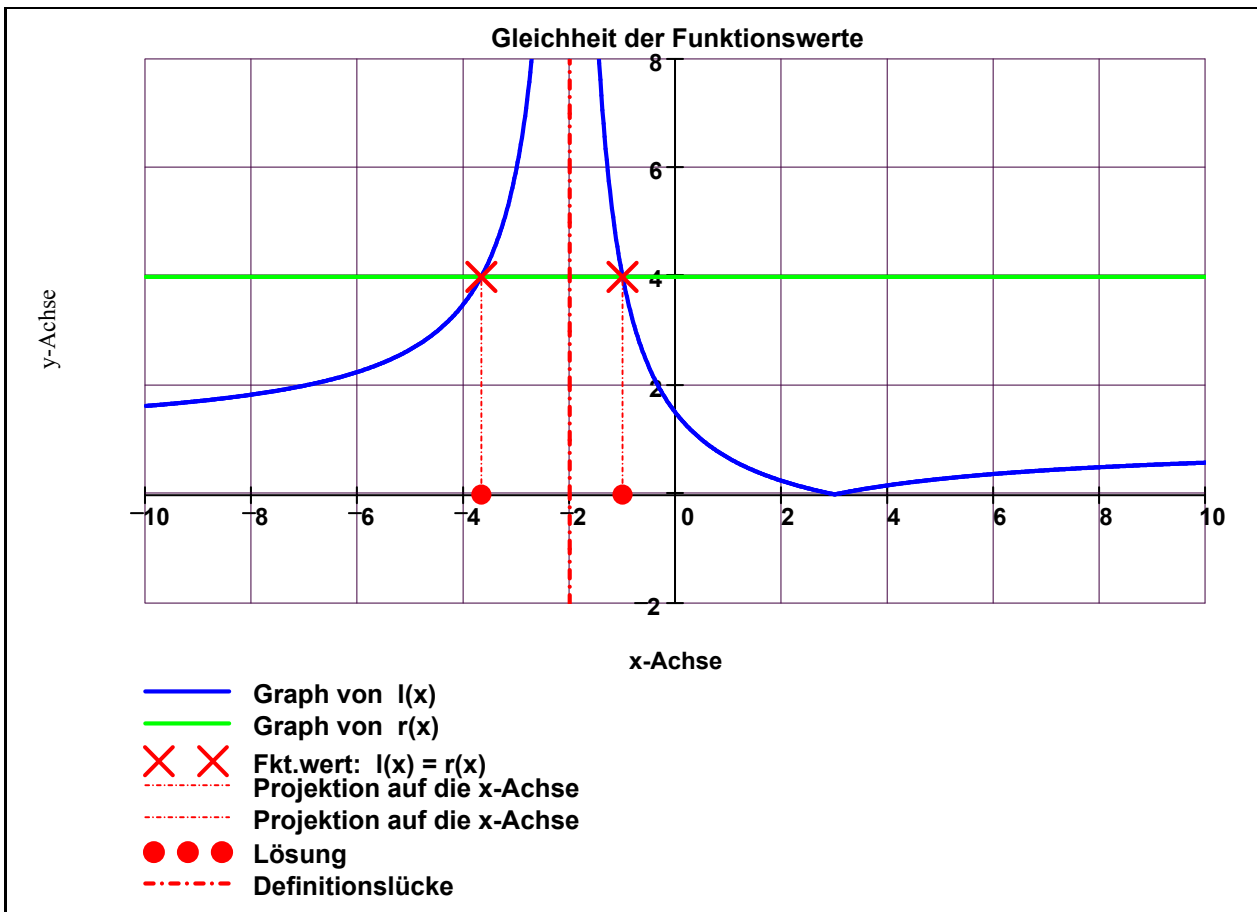
Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} \frac{x-3}{x+2} & \text{if } x < -2 \vee x \geq 3 \\ \frac{3-x}{x+2} & \text{if } -2 < x \leq 3 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 4$



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 5:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge \mathbb{R} .
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $|x^2 - x - 6| = 4 \Leftrightarrow |(x-3) \cdot (x+2)| = 4$ ID = \mathbb{R}

Lösungsweg: Auflösen des Betrags mit Fallunterscheidung. Lösen der quadratischen Gleichungen.

Lösung:

1. Fall: $(x-3) \cdot (x+2) \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} x \leq -2 \\ 3 \leq x \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x \leq -2 \vee x \geq 3$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 4 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.702 \\ -2.702 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{IL}_1 = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}} \right\}$$

2. Fall: $(x-3) \cdot (x+2) \leq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} x \leq 3 \\ -2 \leq x \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-2 \leq x \leq 3$

$$\Rightarrow -x^2 + x + 6 = 4 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{IL}_2 = \{ -1; 2 \}$$

$$\Rightarrow \text{IL} = \text{IL}_1 \cup \text{IL}_2 = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}}; -1; 2; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 41^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{if } x \leq -2 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + x + 6 & \text{if } -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 4$



Graphische Lösung der Gleichung:

