



Wurzelgleichungen

Definition:

Eine Bestimmungsgleichung $\sqrt[n]{\text{Term}(x)} = a$ mit $n, a \in \mathbb{R}$ heißt "Wurzelgleichung".

Bestimmung der Definitionsmenge: Lösen der Ungleichung $\text{Term}(x) \geq 0$.

Bestimmung der Lösungsmenge:

Potenzieren "hoch n" und Gleichung lösen.

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = 2$

Definitionsmenge: $\frac{1}{2} \cdot x - 1 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow 2 \leq x$ ID = [2 ; ∞ [

Lösungsweg: **Quadrieren. Lösen der linearen Gleichung.**

Lösung: $\left(\sqrt{\frac{1}{2} \cdot x - 1}\right)^2 = 2^2$ vereinfachen $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot x - 1 = 4$ auflösen, $x \rightarrow 10$

\Rightarrow IL = { 10 }

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

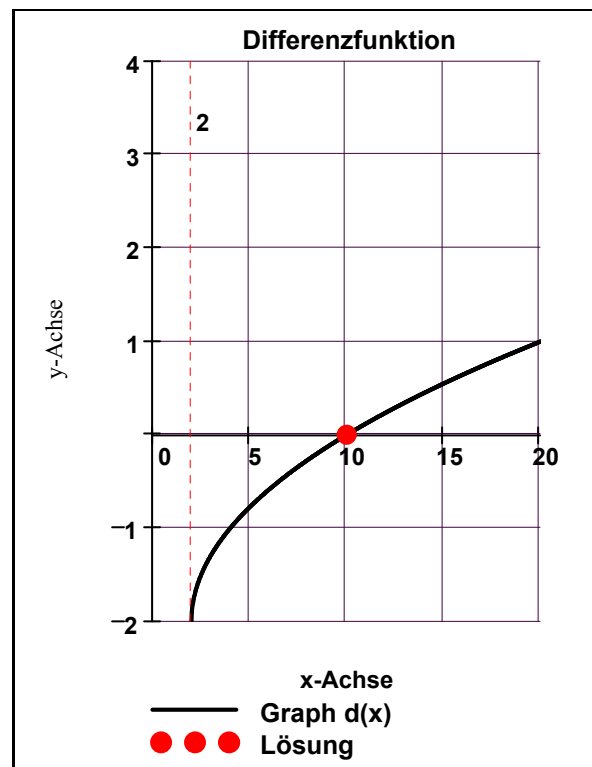
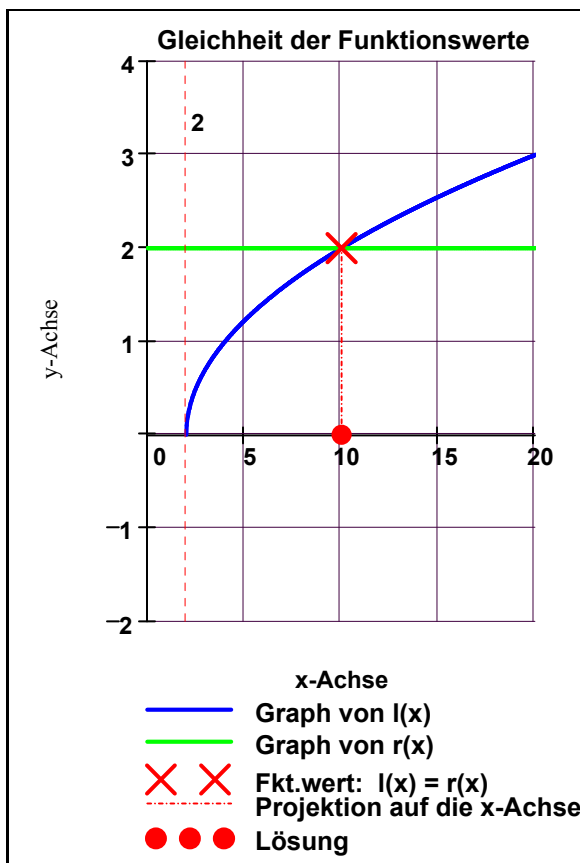
Linke Funktion: $l(x) := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot x - 1}$ Rechte Funktion: $r(x) := 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$



Bestimme diejenigen x-Werte, für die gilt: $d(x) = 0 \Rightarrow x_L \rightarrow 10 = 10$

Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\sqrt{x^2 - 4} = 8$

Definitionsmenge: $x^2 - 4 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} x \leq -2 \\ 2 \leq x \end{pmatrix}$ **ID =] -∞; -2] ∪ [2; ∞ [**

Lösungsweg: **Quadrieren. Lösen der quadratischen Gleichung.**

Lösung: $(\sqrt{x^2 - 4})^2 = 8^2$ vereinfachen $\rightarrow x^2 - 4 = 64$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 17^2} \\ -2 \cdot 17^2 \\ \frac{1}{-2 \cdot 17^2} \end{pmatrix}$

\Rightarrow **IL = { -2·√17; 2·√17 }**

Teilaufgabe b)

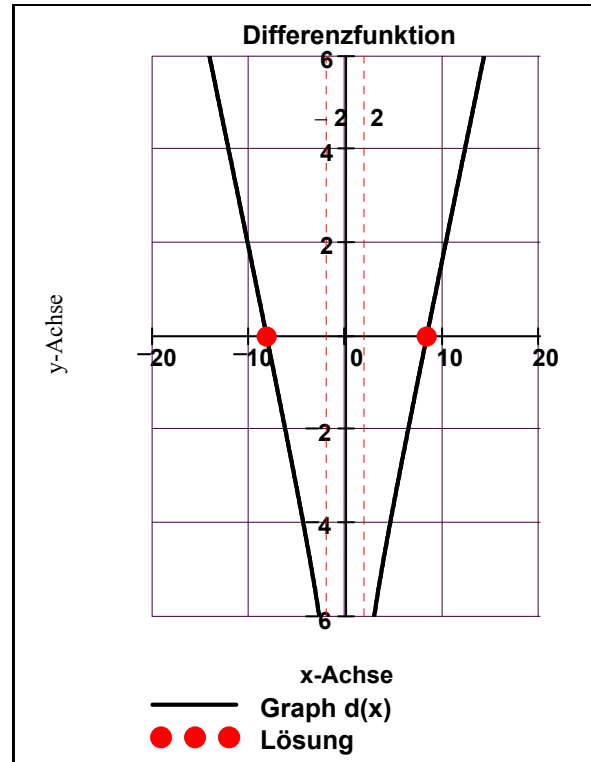
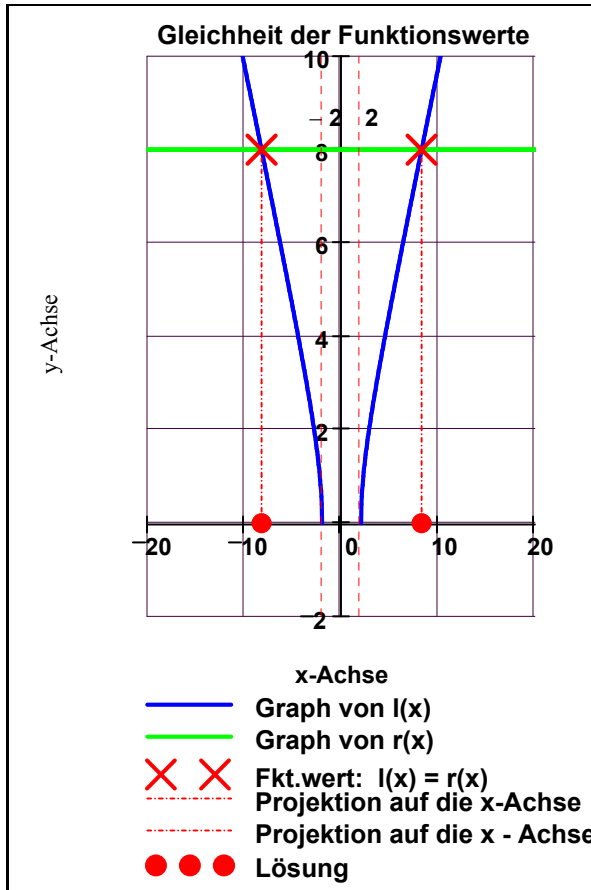
Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: **$l(x) := \sqrt{x^2 - 4}$** Rechte Funktion: **$r(x) := 8$**

Differenzfunktion: **$d(x) := l(x) - r(x)$**



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\sqrt{4 - x^2} = 1$

Definitionsmenge: $4 - x^2 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \leq x \\ x \leq 2 \end{pmatrix}$ **ID = [-2 ; 2]**

Lösungsweg: **Quadrieren. Lösen der quadratischen Gleichung.**

Lösung: $(\sqrt{4 - x})^2 = 1^2$ vereinfachen $\rightarrow 4 - x = 1$ auflösen, $x \rightarrow 3$

\Rightarrow **IL = { 3 }**

Teilaufgabe b)

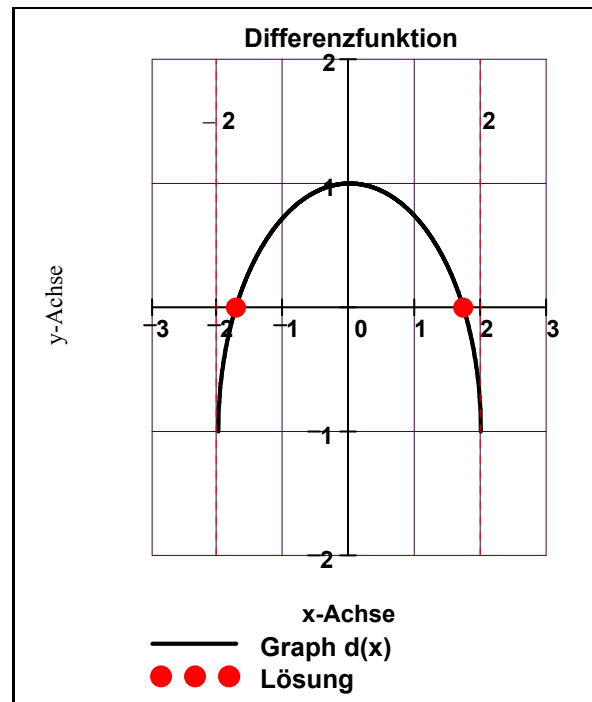
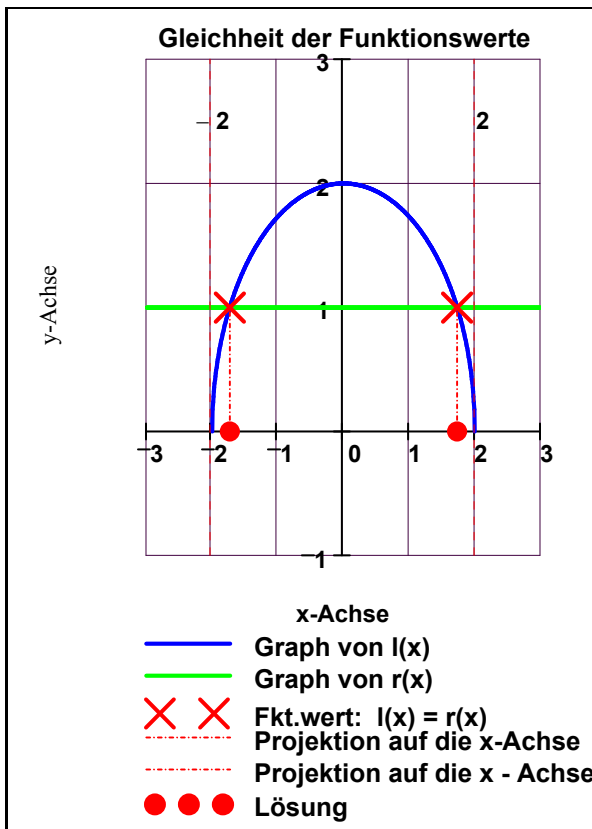
Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \sqrt{4 - x^2}$ Rechte Funktion: $r(x) := 1$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x)$



Graphische Lösung der Gleichung:



Aufgabe 4:

- a) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\sqrt{2 \cdot x^2 + x - 5} + 2 = 2 \cdot x$

Definitionsmenge:

$$2 \cdot x^2 + x - 5 \geq 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} x \leq \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \leq x \end{pmatrix} \quad \text{Zur Übersicht: } \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.851 \\ 1.351 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{ID} = \left\{ x \mid x \leq \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \vee \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{41} \right\}$

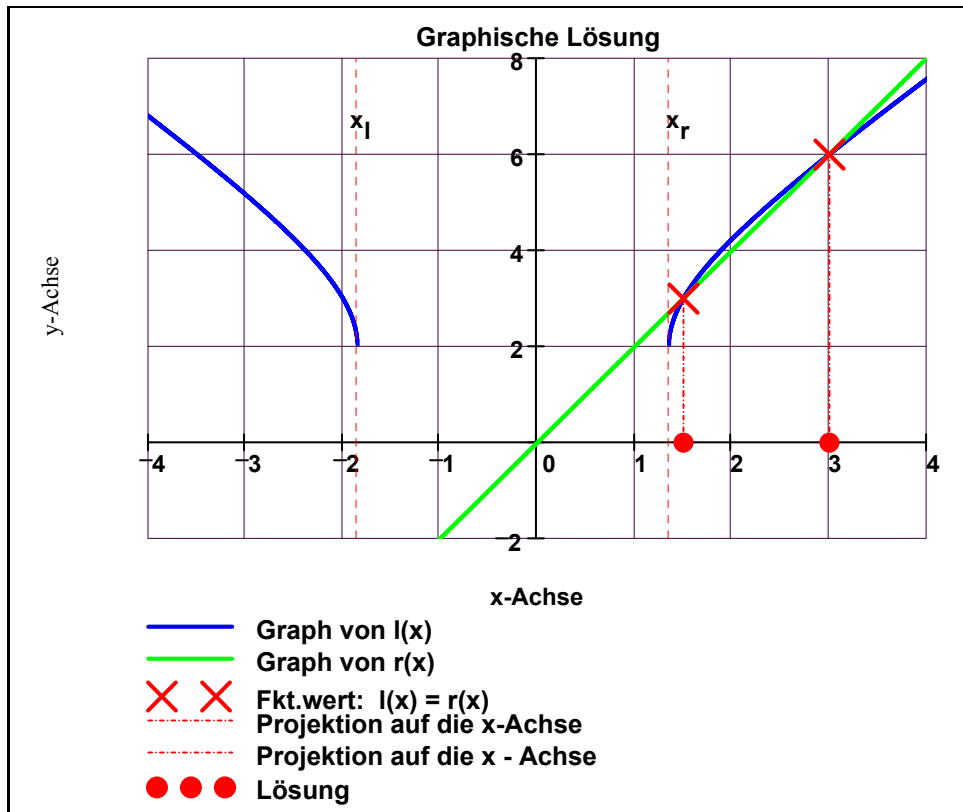
Lösungsweg: Wurzelterm eliminieren, Gleichung quadrieren. Lösen der quadrat. Gleichung.

Lösung: $\left(\sqrt{2 \cdot x^2 + x - 5}\right)^2 = (2 \cdot x - 2)^2$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{IL} = \left\{ \frac{3}{2}; 3 \right\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \sqrt{2 \cdot x^2 + x - 5} + 2$ Rechte Funktion: $r(x) := 2 \cdot x$



Aufgabe 5:

- a) Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge IR.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Gleichung: $\sqrt{8 \cdot x + 4} = \sqrt{3 \cdot x + 4} + 2$

Definitionsmenge: $8 \cdot x + 4 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \frac{-1}{2} \leq x$
 und $3 \cdot x + 4 \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow \frac{-4}{3} \leq x$ \Rightarrow **ID = $[\frac{-1}{2}; \infty)$**

Lösungsweg: Gleichung quadrieren. Wurzelterm eliminieren, Gleichung quadrieren, Lösen der quadratischen Gleichung.

Lösung: $(\sqrt{8 \cdot x + 4})^2 = (\sqrt{3 \cdot x + 4} + 2)^2 \rightarrow 8 \cdot x + 4 = \left[(3 \cdot x + 4)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]^2$

$\Leftrightarrow 8 \cdot x + 4 = (3 \cdot x + 4) + 4 \cdot (3 \cdot x + 4)^{\frac{1}{2}} + 4$

$\Leftrightarrow (5 \cdot x - 4)^2 = \left[4 \cdot (3 \cdot x + 4)^{\frac{1}{2}} \right]^2$ vereinfachen $\rightarrow (5 \cdot x - 4)^2 = 48 \cdot x + 64$

$\Leftrightarrow (5 \cdot x - 4)^2 = 48 \cdot x + 64$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}$ keine Lösung
 Lösung \Rightarrow **IL = { 4 }**

Teilaufgabe b)

Darstellung der Gleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \sqrt{8 \cdot x + 4}$

Rechte Funktion: $r(x) := \sqrt{3 \cdot x + 4} + 2$

