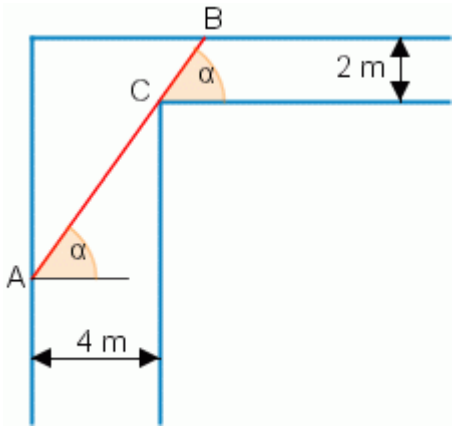
GS - 01.03.2004 - AnwendtrigonomFkt_Balkentransport.mcd

Extremwertaufgabe Balkentransport

- Aus dem Leistungskurs 2002 / A II -

Aufgabe:
Zwei Gänge von 2,0 m und 4,0 m Breite treffen rechtwinklig aufeinander. Es soll die größtmögliche Länge L eines Balkens ermittelt werden, den man in horizontaler Lage aus dem Gang in den anderen tragen kann. Die Dicke des Balkens wird als vernachlässigbar klein angesehen.
Dazu betrachtet man die gezeichnete Figur (siehe rechts).
$\mathbf{l}(\alpha)$ ist die Maßzahl der in Meter angegebenen Länge der Strecke [AB] und definiert für $\mathbf{0°} < \alpha < \mathbf{90°}$ die Funktion l.



a) Geben Sie an, welche Bedeutung die Maßzahl der gesuchten Länge L für die Funktion l hat.

Zeigen Sie: $\mathbf{l}(\alpha) := \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{sin}(\alpha)} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{cos}(\alpha)}$

b) Berechnen Sie L auf dm genau.

a) Zeichnet man für verschiedene α (unter Beibehaltung von C) die Länge $l(\alpha)$ ein (siehe Animation), so erkennt man, dass das Minimum der Funktion $l(\alpha)$ die gesuchte Balkenlänge L ist.

Lösung: **Aufstellen der Zielfunktion:**

$$\frac{4}{AC} = \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{4}{\cos(\alpha)} \qquad \frac{2}{CB} = \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad CB = \frac{2}{\sin(\alpha)}$$

gesamte Länge: $l(\alpha) = AB = AC + CB$

Zielfunktion: $l(\alpha) := \frac{2}{\sin(\alpha)} + \frac{4}{\cos(\alpha)}$

b) **Bestimmung des Extremums:**

1. Ableitung: $l_\alpha(\alpha) := \frac{d}{d\alpha} l(\alpha) \rightarrow \frac{-2}{\sin(\alpha)^2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{4}{\cos(\alpha)^2} \cdot \sin(\alpha)$

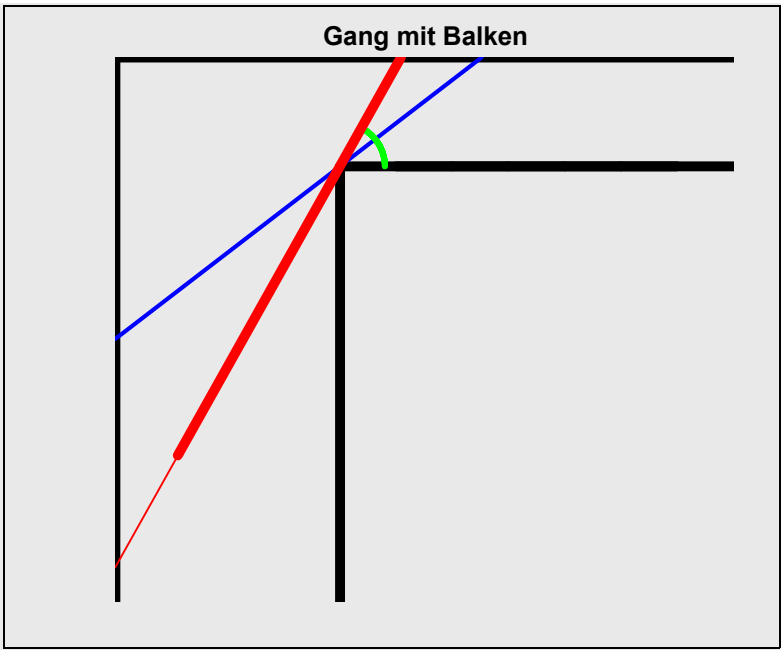
oder umgeformt: $l_\alpha(\alpha) := 2 \cdot \frac{\left(-\cos(\alpha)^3 + 2 \cdot \sin(\alpha)^3\right)}{\sin(\alpha)^2 \cdot \cos(\alpha)^2}$

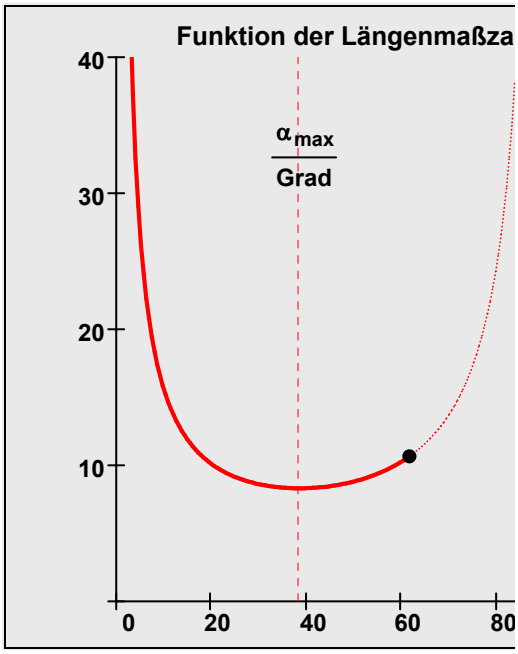
Horizontale Tangenten: $-\cos(\alpha)^3 + 2 \cdot \sin(\alpha)^3 = 0$

entspricht: $\tan(\alpha)^3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$\alpha_{max} := \operatorname{atan}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ $\quad \alpha_{max} = 38.439\,\text{Grad}$ $\quad l(\alpha_{max}) = 8.3$

Animieren von 0 bis 24 $\quad$ **konst ≡ 24**

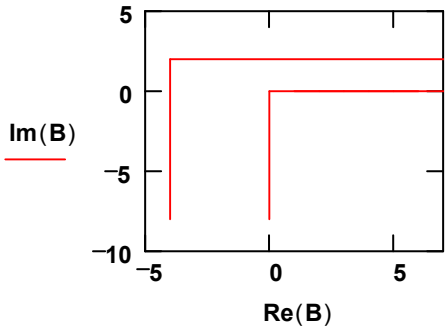




Die **dicke** rote Linie ist die **maximale Länge** auf dem beweglichen Balken.
Die blaue Linie stellt den Grenzfall dar. In der Nähe von α_{max} ändert sich die Länge nur wenig.
Die blaue und die rote dicke Linie sind gleich lang.

$\alpha_1 = 61.5\,\text{Grad}$ $\quad \alpha_{max} = 38.4\,\text{Grad}$

$l(\alpha_1) = 10.659$ $\quad l(\alpha_{max}) = 8.324$


5
0
−5
−10
−5
0
5
Im(B)
Re(B)