GS - 23.08.05 - h2_Betragsungl.mcd

Betragsungleichungen

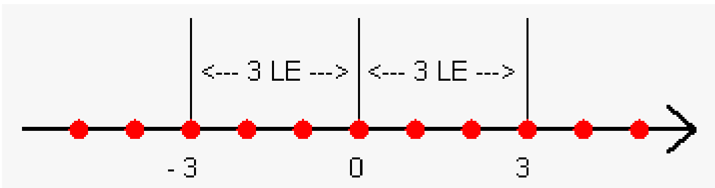
Definition:

Betrag einer Zahl:
$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a = 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

Betrag eines Terms:
$$|a - b| = \begin{cases} (a - b) & \text{if } a > b \\ 0 & \text{if } a = b \\ (b - a) & \text{if } a < b \end{cases}$$

Anschaulich kann man unter $|a|$ die Maßzahl des Abstandes der Zahl a vom Nullpunkt der Zahlengeraden verstehen.

$$|-3| = 3 \quad \wedge \quad |3| = 3$$



Anschaulich kann man unter $|a - b|$ den Abstand zwischen den Zahlen a und b verstehen.

Kommen in einer Gleichung oder Ungleichung Betragsterme vor, so müssen diese mit Hilfe einer Fallunterscheidung erst aufgelöst werden, bevor die endgültige Gleichung oder Ungleichung gelöst werden kann.

Es gilt:
$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$$
$$|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \vee x > a$$

Beispiele dazu siehe auf den nächsten Seiten.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Unleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $|2 \cdot x| < 6$ **ID = IR**

Lösungsweg: **Auflösen des Betrags. Lösen der linearen Ungleichung.**

Lösung:

1. Fall: $2 \cdot x \geq 0$ **auflösen, x** $\rightarrow 0 \leq x$ $\Rightarrow$ $2 \cdot x < 6$ **auflösen, x** $\rightarrow x < 3$ $IL_1 = \{\ 0 \leq x < 3\}$

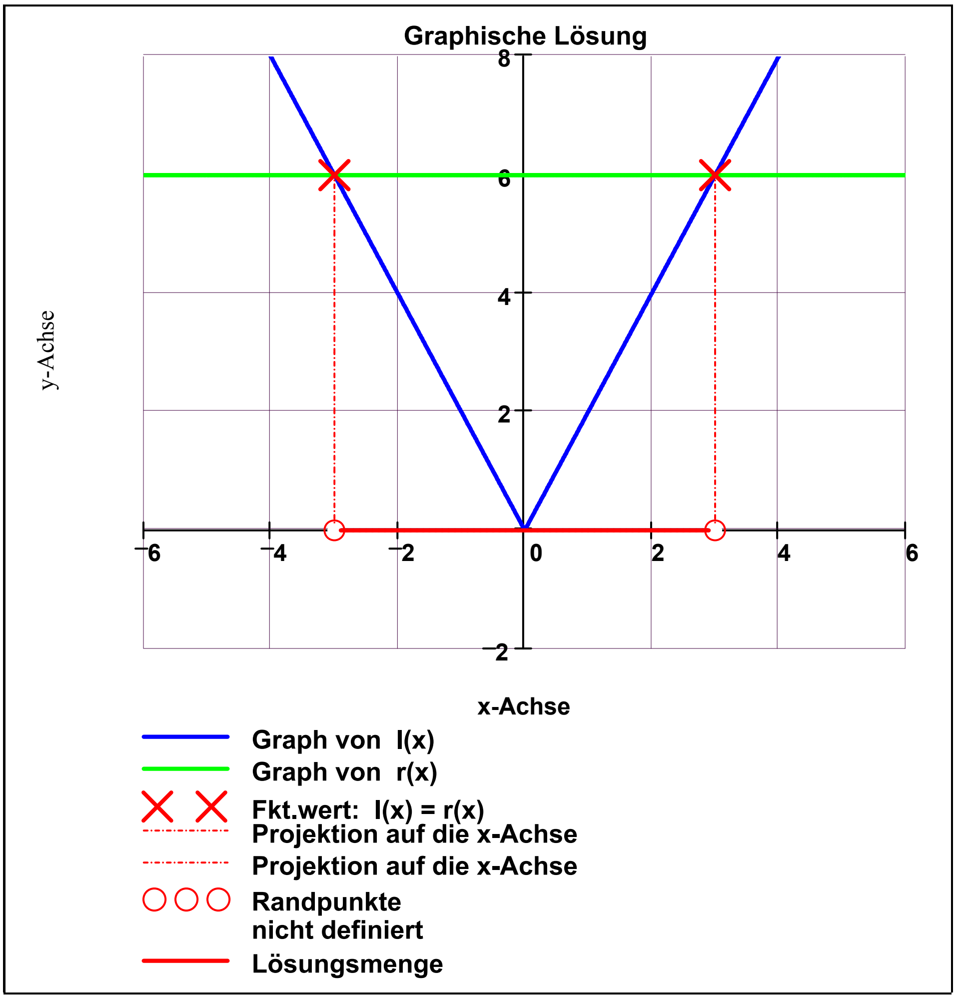
2. Fall: $2 \cdot x \leq 0$ **auflösen, x** $\rightarrow x \leq 0$ $\Rightarrow$ $-(2 \cdot x) < 6$ **auflösen, x** $\rightarrow -3 < x$ $IL_2 = \{-3 < x \leq 0\}$

$\Rightarrow$ $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{-3 < x < 3\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} (2 \cdot x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ (-2 \cdot x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$ Rechte Funktion: $r(x) := 6$



Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $|2 \cdot x| > 6$ **ID = IR**

Lösungsweg: **Auflösen des Betrags. Lösen der linearen Ungleichung.**

Lösung:

1. Fall: $2 \cdot x \geq 0$ auflösen, $x \rightarrow 0 \leq x \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot x > 6$ auflösen, $x \rightarrow 3 < x \qquad IL_1 = \{ x > 3 \}$

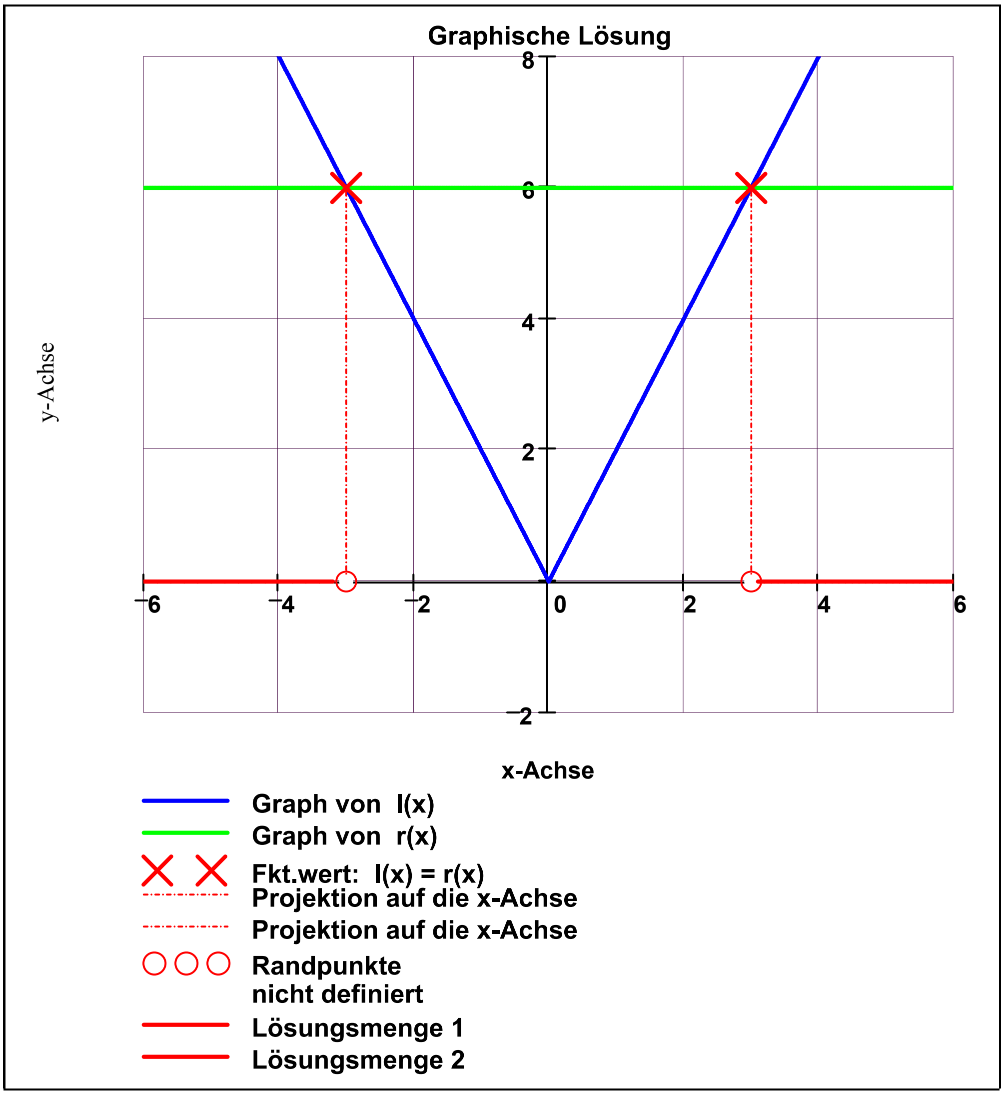
2. Fall: $2 \cdot x \leq 0$ auflösen, $x \rightarrow x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -(2 \cdot x) > 6$ auflösen, $x \rightarrow x < -3 \qquad IL_2 = \{ x < -3 \}$

$\Rightarrow \quad IL = IL_1 \cup IL_2 = \{x \mid x < -3 \lor x > 3\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} (2 \cdot x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ (-2 \cdot x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$ Rechte Funktion: $r(x) := 6$



Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $|4 - x| \leq 3$ **ID = IR**

Lösungsweg: **Auflösen des Betrags. Lösen der linearen Ungleichung.**

Lösung:

1. Fall: $4 - x \geq 0$ **auflösen, x** $\rightarrow x \leq 4$ $\Rightarrow$ $4 - x \leq 3$ **auflösen, x** $\rightarrow 1 \leq x$ $\mathbb{L}_1 = \{ 1 \leq x \leq 4 \}$

2. Fall: $4 - x \leq 0$ **auflösen, x** $\rightarrow 4 \leq x$ $\Rightarrow$ $-(4 - x) \leq 3$ **auflösen, x** $\rightarrow x \leq 7$ $\mathbb{L}_2 = \{ 4 \leq x \leq 7 \}$

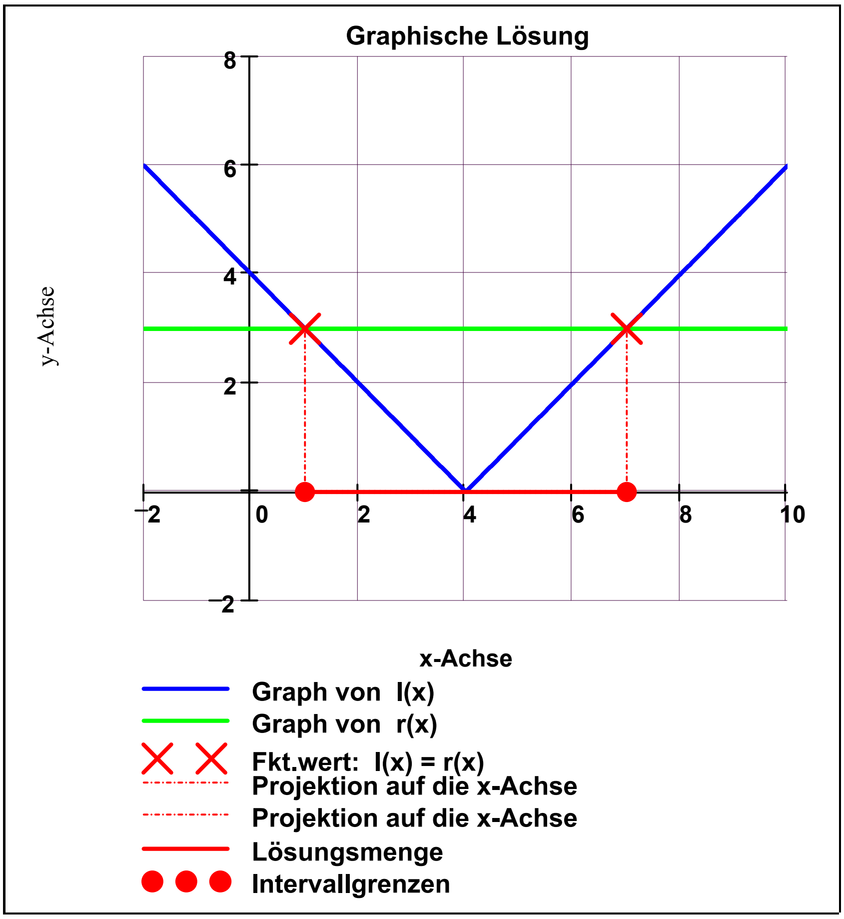
$\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{ 1 \leq x \leq 7 \}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{vmatrix} (4 - x) & \text{if } x < 4 \\ 4 & \text{if } x = 0 \\ (x - 4) & \text{if } x > 4 \end{vmatrix}$

Rechte Funktion: $r(x) := 3$



Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge IR.

b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $|x| + |x-2| > 4$ $\qquad$ **ID = IR**

Lösungsweg: Auflösen der beiden Beträge. Lösen der linearen Ungleichung mit Fallunterscheidung.

Lösung:

1. Fall: $x \ge 0$

und $x - 2 \ge 0$ auflösen, $x \to 2 \le x$ $\quad\Rightarrow\quad x \ge 2$

$\Rightarrow\quad x + (x-2) > 4$ auflösen, $x \to 3 < x$ $\quad\Rightarrow\quad IL_1 = \{\, x > 3 \,\}$

2. Fall: $x \le 0$

und $x - 2 < 0$ auflösen, $x \to x < 2$ $\quad\Rightarrow\quad x \le 0$

$\Rightarrow\quad -x - (x-2) > 4$ auflösen, $x \to x < -1$ $\quad\Rightarrow\quad IL_2 = \{\, x < -1 \,\}$

3. Fall: $x > 0$

und $x - 2 < 0$ auflösen, $x \to x < 2$ $\quad\Rightarrow\quad 0 < x < 2$

$\Rightarrow\quad x - (x-2) > 4 \quad\Leftrightarrow\quad 2 > 4 \quad\Rightarrow\quad IL_3 = \{\ \}$

4. Fall: $x < 0$

und $x - 2 > 0$ auflösen, $x \to 2 < x$ $\quad\Rightarrow\quad$ **Widerspruch**

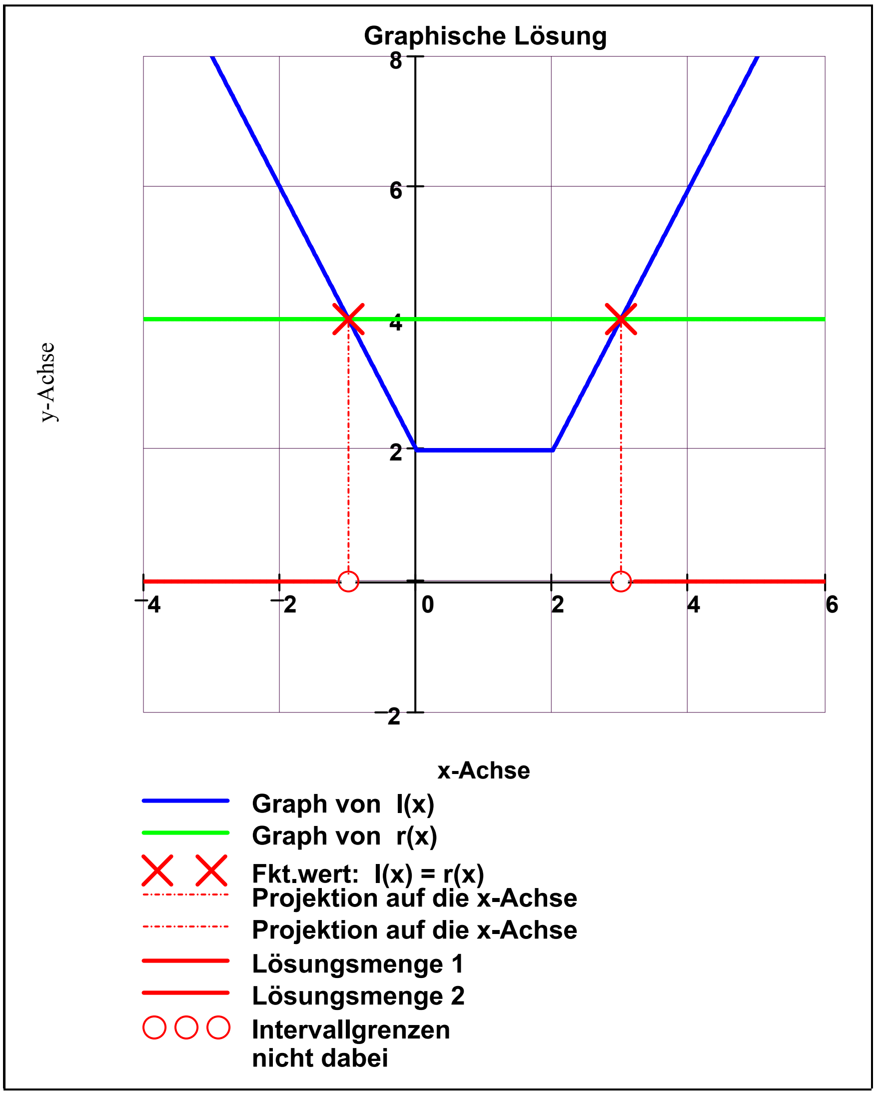
$\Rightarrow\quad IL = IL_1 \cup IL_2 \cup IL_3 = \{\, x < -1 \vee x > 3 \,\}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} (2\cdot x - 2) & \text{if } x \ge 2 \\ (-2\cdot x + 2) & \text{if } x \le 0 \\ 2 & \text{if } 0 < x < 2 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 4$


Graphische Lösung
8
6
4
2
−2
−4
−2
0
2
4
6
y-Achse
x-Achse
Graph von l(x)
Graph von r(x)
Fkt.wert: l(x) = r(x)
Projektion auf die x-Achse
Projektion auf die x-Achse
Lösungsmenge 1
Lösungsmenge 2
Intervallgrenzen
nicht dabei

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| \le 4$ $\quad$ **ID = IR \ { −2 }**

Lösungsweg: Auflösen des Betrags. Lösen der Bruchungleichuneg mit Fallunterscheidung.

Lösung:

1. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \ge 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < -2 \\ 3 \le x \end{pmatrix} \Rightarrow x < -2 \vee x \ge 3$

$\Rightarrow \frac{x-3}{x+2} \le 4 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \le \frac{-11}{3} \\ -2 < x \end{pmatrix} \Rightarrow IL_1 = \{ x \mid x \le \frac{-11}{3} \vee x \ge 3 \}$

2. Fall: $\frac{x-3}{x+2} \le 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 < x \\ x \le 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -2 < x \le 3$

$\Rightarrow \frac{3-x}{x+2} \le 4 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < -2 \\ -1 \le x \end{pmatrix} \Rightarrow IL_2 = \{ -1 \le x \le 3 \}$

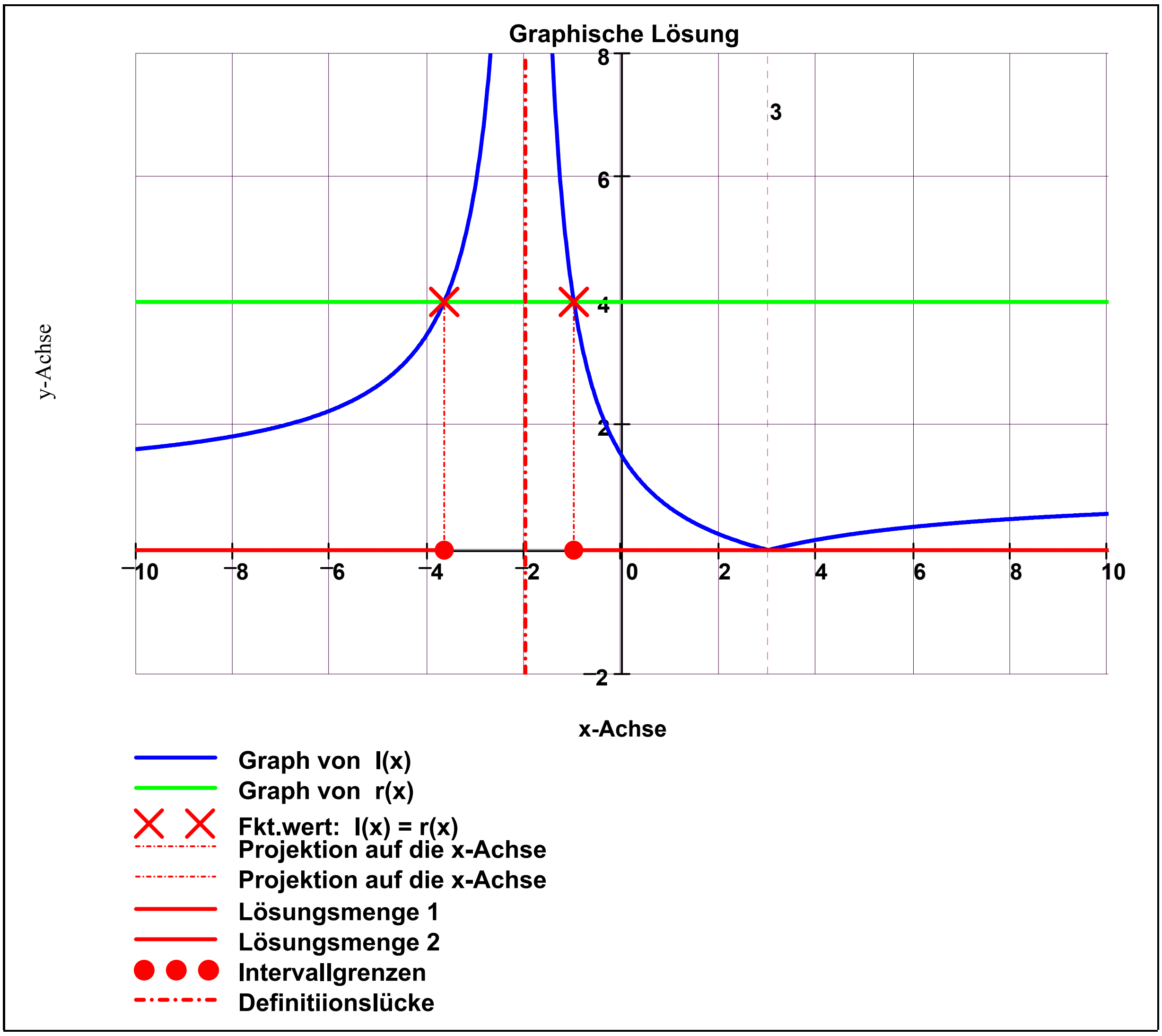
$\Rightarrow \quad IL = IL_1 \cup IL_2 = \{ x \le \frac{-11}{3} \vee x \ge -1 \}$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} \frac{x-3}{x+2} & \text{if } x < -2 \vee x \ge 3 \\ \frac{3-x}{x+2} & \text{if } -2 < x \le 3 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 4$



Graphische Lösung
y-Achse
x-Achse
8
6
4
2
−2
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
3
Graph von l(x)
Graph von r(x)
Fkt.wert: l(x) = r(x)
Projektion auf die x-Achse
Projektion auf die x-Achse
Lösungsmenge 1
Lösungsmenge 2
Intervallgrenzen
Definitiionslücke

Aufgabe 6:

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge IR.
b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $\left|x^2 - x - 6\right| \ge 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left|(x-3)\cdot(x+2)\right| \ge 5$ **ID = IR**

Lösungsweg: Auflösen des Betrags mit Fallunterscheidung. Lösen der quadratischen Ungleichungen.

Lösung:

1. Fall: $(x-3)\cdot(x+2) \ge 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \le -2 \\ 3 \le x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x \le -2 \vee x \ge 3$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x - 6 \ge 5 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \le \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \le x \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = -2.854 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = 3.854 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad IL_1 = \{ x \mid x \le \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \vee x \ge \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \}$$

2. Fall: $(x-3)\cdot(x+2) \le 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \le 3 \\ -2 \le x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -2 \le x \le 3$

$$\Rightarrow \quad -x^2 + x + 6 \ge 5 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \le x \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = -0.618 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = 1.618 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad IL_2 = \{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \}$$

$$\Rightarrow \quad IL = IL_1 \cup IL_2 = \{ x \mid x \le \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \vee \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \vee x \ge \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 5^{\frac{1}{2}} \}$$

Teilaufgabe b)

Darstellung der Ungleichung mit Funktionen:

Linke Funktion: $l(x) := \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{if } x \le -2 \vee x \ge 3 \\ -x^2 + x + 6 & \text{if } -2 \le x \le 3 \end{cases}$

Rechte Funktion: $r(x) := 5$