Mündliche Prüfung Mathematik 12.Klasse FOS-BOS Technik 02

1.0 Es existiere die Funktion f: x--> $2 \cdot e^{x} - e^{-2 \cdot x}$ ohne Einschränkung des Definitionsbereichs.

1.1 Bestimmen Sie das Grenzverhalten x-> + - ∞ der Funktion f.
1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f.
1.3 Untersuchen Sie die Funktion auf Extrem- und Wendepunkte.
1.4 Skizzieren Sie den Graphen von f.

1.1 f(x) $\xrightarrow{x \to +\infty}$ +∞ f(x) $\xrightarrow{x \to -\infty}$ -∞ $\qquad f(x) := 2 \cdot e^{x} - e^{-2 \cdot x}$

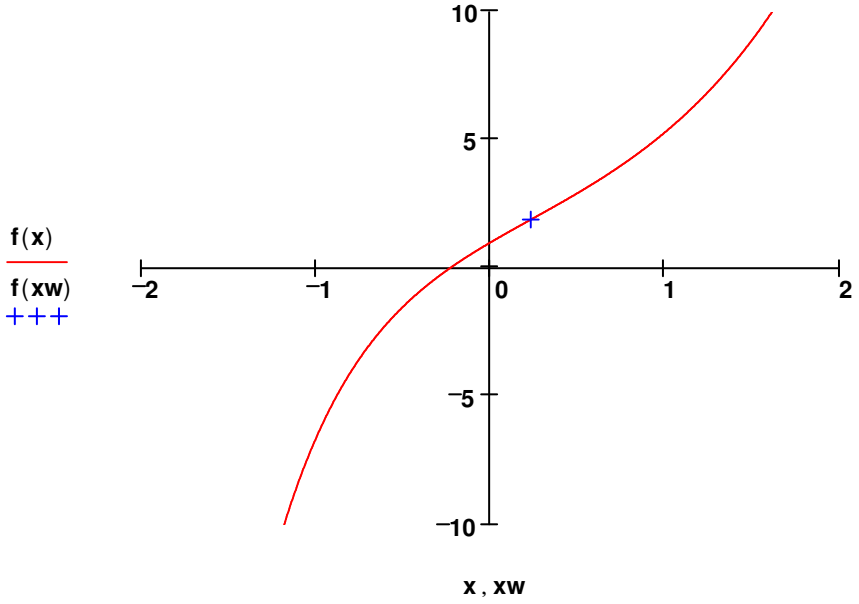
1.2 Substitution: $0 = 2 \cdot u - u^{-2}$ $\qquad u := 2^{-\frac{1}{3}}$ $\qquad xn := -\frac{1}{3} \cdot \ln(2)$ $\qquad xn = -0.231$

1.3 f ' (x) = $2 \cdot e^{x} + 2 \cdot e^{-2 \cdot x} > 0$ keine Extrempunkte

f ' ' (x) = $2 \cdot e^{x} - 4 \cdot e^{-2 \cdot x} = 0$ Substitution: $u := 2^{\frac{1}{3}}$ $\qquad xw := \frac{1}{3} \cdot \ln(2)$ $\qquad xw = 0.231$

f ' ' ' (x) = $2 \cdot e^{x} + 8 \cdot e^{-2 \cdot x} > 0$ WP existiert! $\qquad f(xw) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 1.89$

1.4



2.0 Sei w die Abszisse des Wendepunktes. Dann umschließen die Gerade x=w , der Graph von f, und die Abszisse ein Flächenstück.
2.1 Berechnen Sie seinen Inhalt.

2.1 $A := \int_{-\frac{1}{3} \cdot \ln(2)}^{\frac{1}{3} \cdot \ln(2)} f(x)\, dx$ $\qquad A \rightarrow \frac{9}{4} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 0.454$ $\qquad F(x) := 2 \cdot e^{x} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x}$

$F\left(\frac{1}{3} \cdot \ln(2)\right) \rightarrow \frac{9}{4} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2.835$ $\qquad F\left(-\frac{1}{3} \cdot \ln(2)\right) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2.381$

3.0 Gegeben sind der Punkt S(-5; -1; 1) sowie die Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.1 g und h schneiden sich im Punkt C. Berechnen Sie seine Koordinaten.
3.2 g und h spannen die Ebene E auf. Geben Sie eine Gleichung von E an und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S*, der eine senkrechte Projektion von S auf E darstellt.
3.3 S, C und die Fußpunkte von g und h spannen einen Tetraeder auf. Berechnen Sie sein Volumen.

3.1 g=h: λ= -1 und μ= -2 -->

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} -3 - 5 \cdot \lambda \\ 2 + 2 \cdot \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \mu \\ -2 - \mu \\ -1 - \mu \end{pmatrix}$$

$$=> \quad -3 + 5 = 4 - 2 \qquad => \quad \lambda := -1 \qquad => \quad \mu := -2$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C(2 ; 0 ; 1)$$

3.2 $$n := \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E: \quad n \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \rightarrow -2 \cdot x_1 + 1 - 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0$$

Hilfsgerade h: $$h(\delta) := \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in E: $$n \cdot \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \rightarrow 19 + 38 \cdot \delta = 0 \qquad => \quad \delta := -\frac{1}{2} \qquad S^*: \quad h(\delta) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

3.3 $$AC := \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad BC := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad G := \frac{1}{2} \cdot \left| AC \times BC \right| \rightarrow 38^{\frac{1}{2}} \qquad G = 6.164$$

$$hh := \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - h(\delta) \right| \qquad hh = 3.082 \qquad V := \frac{1}{3} \cdot G \cdot \left| hh \right| \rightarrow \frac{19}{3} \qquad V = 6.333$$