

Beurteilende Statistik - Testen von Hypothesen Übungsaufgaben (1)

- (1) Eine Firma möchte bei einem Signifikanztest das Fehlerrisiko bzw. Signifikanzniveau bei $\alpha = 0$ halten. Welche Konsequenzen zieht diese Festlegung mit sich?
- (2) Bei einem Signifikanztest wurde die Nullhypothese auf dem 1% Signifikanzniveau verworfen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?
 A: Die Nullhypothese ist nachweislich eindeutig falsch.
 B: Die Alternativhypothese ist nachweislich eindeutig wahr .
 C: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gilt H_1 .
 D: Die Nullhypothese kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% verwerfen.
- (3) In einer Klinik wird ein neues Medikament, das die Konzentrationsfähigkeit für Patienten mit einem Schädel-Hirn-Trauma verbessern soll, getestet. Mit einem Signifikanztest soll festgestellt werden, ob dieses Programm erfolgreich ist. Wie lautet die Null- und die Alternativhypothese?
- (4) Bei einem Würfel wird geprüft ob es sich um einen Laplace-Würfel handelt. Beschreiben Sie die Fehler 1.Art und 2.Art.
- (5) Ein Arzneimittel, das das Überleben eines Patienten sichern soll, wird getestet. Beschreibe Fehler 1.Art und 2.Art. Welcher ist der verhängnisvollere?
- (6) Eine LKW-Ladung Computer wird vor der Übergabe an ein Geschäft noch einmal überprüft. Was sind hier Fehler 1.Art und 2.Art?
 Welches Risiko bezeichnet man als Produzentenrisiko, welches als Konsumentenrisiko?
- (7) Eine Waschmittelfirma will durch eine Befragung herausfinden, ob durch eine intensive Werbekampagne mehr Kunden erreicht werden können. Was sind die Risiken 1. und 2.Art?
- (8) Jemand möchte einen zugefrorenen See betreten. Um sicher zu sein, dass das Eis ihn trägt wirft er Steine auf die Eisoberfläche. Ermitteln Sie den Fehler 1.Art bzw. 2.Art.
- (9) In einer Regierungswahl erhielt eine Partei 55% der Stimmen und bildet damit die Mehrheit im Parlament. Nach der Wahl wurden einige fragwürdige Gesetze verabschiedet. Bei einer Umfrage unter 900 Bürgern gaben 521 an, die besagte Partei erneut zu wählen, wenn demnächst Wahlen wären.
 Hat die Regierungspartei durch ihre Maßnahmen die mehrheitliche Unterstützung der Bevölkerung - bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3% - verloren?

[Die Tabelle für die Binomialverteilung](#)

Lösungen:

- (1) Eine Firma möchte bei einem Signifikanztest das Fehlerrisiko bzw. Signifikanzniveau bei $\alpha = 0$ halten. Welche Konsequenzen zieht diese Festlegung mit sich?

Antwort:

Möchte man das Risiko 1.Art verringern, muss man entweder seine Entscheidungsregel verändern oder den Umfang des Tests erhöhen.

Beides hat Nachteile: Verändert man die Entscheidungsregel zugunsten von α , erhöht sich automatisch das Risiko 2.Art. Erhöht man den Umfang des Tests, zieht sich das Verfahren zeitlich in die Länge und wird aufwendiger.

$\alpha = 0$ bedeutet, alles zu testen.

- (2) Bei einem Signifikanztest wurde die Nullhypothese auf dem 1% Signifikanzniveau verworfen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

A: Die Nullhypothese ist nachweislich eindeutig falsch.

Antwort:

FALSCH. Es ist nicht bewiesen, dass die Nullhypothese eindeutig falsch ist. Man glaubt lediglich, dass die Wahrscheinlichkeit groß ist, dass sie falsch ist.

B: Die Alternativhypothese ist nachweislich eindeutig wahr .

Antwort:

FALSCH. Es ist nicht eindeutig bewiesen, dass sie wahr ist. Man hat durch das Signifikanzniveau die Nullhypothese verworfen und nimmt die alternative Hypothese an. Dennoch besteht eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese zutrifft.

C: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gilt H_1 .

Antwort:

FALSCH. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% gilt H_0 .

Begründung: $\alpha = 0.01 \Rightarrow P(H_0) = 1 - \alpha = 0.99 = 99\%$

D: Die Nullhypothese kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% verwerfen.

Antwort: WAHR.

Begründung: $\alpha = 0.01 \Rightarrow$ Fehler 1.Art: H_0 ist wahr und man entscheidet gegen H_0 aufgrund des Tests.

- (3) In einer Klinik wird ein neues Medikament, das die Konzentrationsfähigkeit für Patienten mit einem Schädel-Hirn-Trauma verbessern soll, getestet. Mit einem Signifikanztest soll festgestellt werden, ob dieses Programm erfolgreich ist. Wie lautet die Null- und die Alternativhypothese?

Antwort: Mögliche Hypothesen:

Nullhypothese: "Das Medikament verbessert die Konzentrationsfähigkeit von Schädel-Hirn-Trauma-Patienten"

Alternative Hypothese: "Das Medikament verbessert nicht die Konzentrationsfähigkeit der Patienten."

- (4) Bei einem Würfel wird geprüft ob es sich um einen Laplace-Würfel handelt. Beschreiben Sie die Fehler 1.Art und 2.Art.

Antwort:

Nullhypothese: "Der Würfel ist ein Laplace-Würfel"

Alternative Hypothese: " Der Würfel ist kein Laplace-Würfel"

Fehler 1.Art: H_0 ist wahr, H_1 wird angenommen:

"Der Würfel ist ein Laplace Würfel, aber man nimmt an, dass es keiner ist."

Fehler 2.Art: H_1 ist wahr, H_0 wird angenommen:

"Der Würfel ist kein Laplace-Würfel, aber man nimmt an, dass es einer ist."

- (5) Ein Arzneimittel, das das Überleben eines Patienten sichern soll, wird getestet. Beschreibe Fehler 1.Art und 2.Art. Welcher ist der verhängnisvollere?

Antwort:

H_0 : "Das Arzneimittel sichert das Überleben des Patienten." Oder: "Der Patient überlebt mit Hilfe des Medikaments."

H_1 : "Das Arzneimittel wirkt nicht."

Fehler 1.Art: "Das Medikament kann das Überleben des Patienten sichern, wird aber nicht angewendet."

Fehler 2.Art: "Das Medikament wird dem Patienten verabreicht mit der Annahme, dass es wirkt, was jedoch nicht zutrifft."

⇒ In diesem Fall ist der Fehler 1.Art (für den Patienten) der schwerwiegendere. (Im Zuge der laufenden Reformierung unseres Gesundheitssystems wird es irgendwann der Fehler 2. Art werden.)

- (6) Eine LKW-Ladung Computer wird vor der Übergabe an ein Geschäft noch einmal überprüft. Was sind hier Fehler 1.Art und 2.Art?
Welches Risiko bezeichnet man als Produzentenrisiko, welches als Konsumentenrisiko?

Antwort:

H_0 : "Die Computer sind einwandfrei."

H_1 : "Die Computer sind defekt."

Fehler 1.Art: "Die Computer sind in Ordnung, werden aber reklamiert."

Fehler 2.Art: "Die Computer sind defekt, werden aber im Geschäft zum Verkauf angeboten."

⇒ Der Fehler 1.Art ist das Produzentenrisiko, weil sich der Fehler zu seinem Nachteil auswirkt, der Fehler 2.Art ist das Konsumentenrisiko.

- (7) Eine Waschmittelfirma will durch eine Befragung herausfinden, ob durch eine intensive Werbekampagne mehr Kunden erreicht werden können. Was sind die Risiken 1. und 2.Art?

Antwort:

H_0 : "Mehr Kunden werden erreicht."

H_1 : "Es ist werden nicht mehr Kunden durch eine intensive Werbekampagne gewonnen."

Fehler 1.Art: "Es gibt keine intensive Werbekampagne, obwohl mehr Kunden gewonnen werden könnten."

Fehler 2.Art: "Es wird eine intensive Werbekampagne gestartet, trotzdem gewinnt man keine neuen Kunden."

- (8) Jemand möchte einen zugefrorenen See betreten. Um sicher zu sein, dass das Eis ihn trägt wirft er Steine auf die Eisoberfläche. Ermitteln Sie den Fehler 1.Art bzw. 2.Art.

Antwort:

H_0 : "Das Eis trägt die Person."

H_1 : "Das Eis bricht."

Fehler 1.Art: "Die Person nimmt an, dass das Eis bricht, obwohl es ihn tragen würde."

Fehler 2.Art: "Die Person betritt das Eis und bricht ein."

- (9) In einer Regierungswahl erhielt eine Partei **55% der Stimmen** und bildet damit die Mehrheit im Parlament. Nach der Wahl wurden einige fragwürdige Gesetze verabschiedet. Bei einer Umfrage unter **900 Bürgern** gaben **521** an, die **besagte Partei erneut zu wählen**, wenn demnächst Wahlen wären. Hat die Regierungspartei durch ihre Maßnahmen die **mehrheitliche Unterstützung** der Bevölkerung - bei einer **Irrtumswahrscheinlichkeit von 3% - verloren?**

Antwort: Gegeben: $n := 900$ $p := 0.55$ $\alpha := 0.03$ 521 Stimmen für die Partei

Gesucht: $k = ?$

1. *Formulierung der Hypothesen:*

H_0 : "Die Partei hat die mehrheitliche Unterstützung (55%) noch"

H_1 : "Die Partei hat Wählerstimmen verloren"

2. *Entscheidungsregel:*

X := "Anzahl der Stimmen, die für die Partei sind"

$k \leq X \leq 900$: Annahme von H_0

$0 \leq X \leq k - 1$: Ablehnung von H_0

3. *Fehler 1.Art:* $P(H_1) = \alpha \leq 0.03$

$$1 - P(H_0) = \alpha \leq 0.03$$

$$1 - \alpha = 0.97 \leq P(H_0)$$

Suche im Tafelwerk: $p = 0.55$ $n = 900$ $1 - \alpha = 0.97 \leq P$ $k_0 := 520$

Mit Mathcad: $m := 0..n$ $C := \text{SPBinTabelle}(n, p)$ $k := k_0..k_0 + 6$ $B_{k-k_0} := C_k$

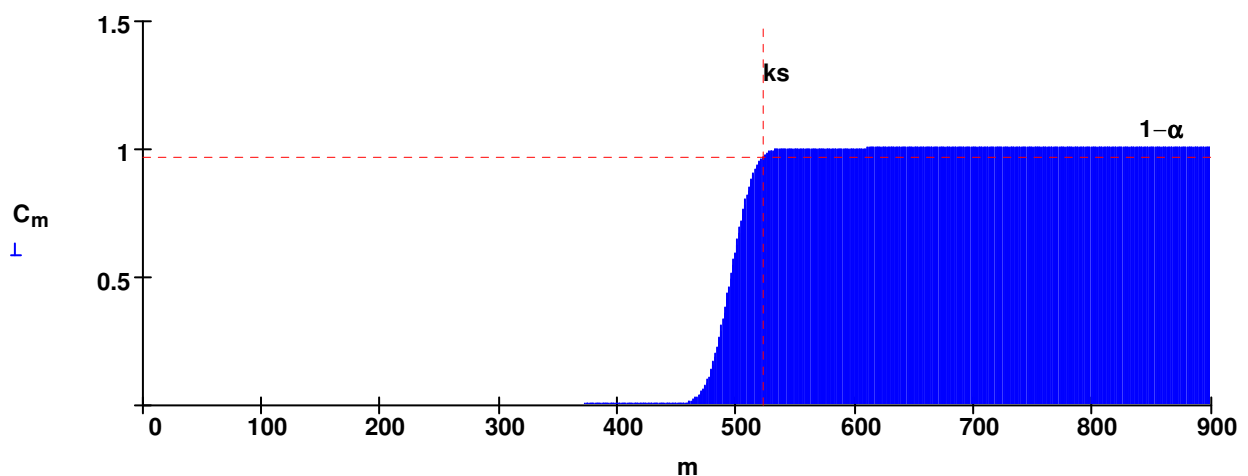
$k =$	520	$B =$	0.956462095
	521		0.962326395
	522		0.967530368
	523		0.972127376
	524		0.976169741
	525		0.979708201
	526		0.98279146

\Rightarrow Ab $ks := 523$ ist $P > 0.97$

\Rightarrow für $0 \leq X \leq 522$ gilt $P < 0.97$

Die Partei hat die mehrheitliche Unterstützung bei 523 und mehr Stimmen. (Also hat sie wahrscheinlich Stimmen verloren)

4. *Graphik:*



Binomialkoeffizient: $bk(n, k) := \text{wenn} \left(k < 1, 1, \frac{n}{k} \cdot bk(n-1, k-1) \right)$

Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli: $PBinver(n, p, k) := bk(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

n: Anzahl der Versuche
 p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer
 k: Anzahl der Treffer

Summenwahrscheinlichkeit, höchstens z Treffer: $SPBin_h(n, p, z) := \sum_{k=0}^z PBinver(n, p, k)$

Summenwahrscheinlichkeit, mindestens z Treffer: $SPBin_m(n, p, z) := \sum_{k=z}^n PBinver(n, p, k)$

B(n,p) in Tabellenform, für große n :

```

PBinTabelle(n, p) :=
  k ← 0
  q ← p if p > 0.5
  q ← 1 - p otherwise
  b ← qn
  m0 ← b
  while k < n
    k ← k + 1
    b ← b ·  $\frac{(1-q) \cdot (n-k+1)}{q \cdot k}$ 
    mk ← b
  if p > 0.5
    z ← ceil( $\frac{n}{2}$ )
    for k ∈ 0..z
      s ← mk
      mk ← mn-k
      mn-k ← s
  m
  
```

F(n,p) in Tabellenform, für große n :

```

SPBinTabelle(n, p) :=
  m ← PBinTabelle(n, p)
  s ← 0
  for k ∈ 0..n-1
    s ← s + mk
    mk ← s
  mn ← 1
  m
  
```