Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

4) Erwartungswert

Bei jedem Glücksspiel interessieren den Spieler vor allem die Gewinnchancen.

1. Beispiel: Setzen auf 1. Dutzend beim Roulett

Ein Spieler setzt auf 1. Dutzend. Trifft die Kugel eine der Zahlen 1 - 12, so wird der dreifache Einsatz ausbezahlt, der Reingewinn ist also der doppelte Einsatz. Kommt eine andere der 37 Zahlen, so geht der Einsatz verloren.

$$\Omega := \begin{pmatrix} \text{"1, 2, ... , 12"} \\ \text{"0, 13, 14, ... , 36"} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zufallsgröße } \mathbf{X}} x := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Wahrscheinlichkeitsverteilung } \mathbf{P}} p := \begin{pmatrix} \frac{12}{37} \\ \frac{25}{37} \end{pmatrix}$$

Reingewinn

Der durchschnittliche Gewinn (Erwartungswert) errechnet sich wie folgt:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{12}{37} + (-1) \cdot \frac{25}{37} = \frac{-1}{37}$$

Der durchschnittliche Gewinn (Erwartungswert) ist negativ, d. h. langfristig ist mit einem Verlust zu rechnen oder anders gesagt:
Die Bank gewinnt immer.

Definition
Der Erwartungswert $\mu = E(X)$ einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $W = \{ x_0, x_1, x_2, \ ... \ , x_N \}$ errechnet sich wie folgt:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{N} (x_i \cdot p_i)$$

Für obiges Beispiel folgt:

$N := \text{länge}(x) - 1$

$$\mu := \sum_{i=0}^{N} \left(x_i \cdot p_i\right)$$

$\mu = -0.027$

Merke: **Der Erwartungswert ist der Mittelwert der Statistik.**

Merke: **Ein Glücksspiel mit dem Erwatungswert $\mu = 0$ wird als fair bezeichnet.**

2. Beispiel: Berechnung des **Notendurchschnitts einer Klasse**

$i := 0 .. 5$

Notenverteilung einer Klasse

$$Noten := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Anzahl := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S := \sum_i Anzahl_i$$

$Noten^T = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6)$

$Anzahl^T = (3 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 6 \;\; 5 \;\; 2)$

$S = 30$ Klassenstärke

Notendurchschnitt:

$$Durchschnitt := \frac{\sum_i \left(Noten_i \cdot Anzahl_i\right)}{S}$$

$Durchschnitt = 3.367$

oder

$$Durchschnitt1 := \sum_i \left[Noten_i \cdot \left(\frac{Anzahl_i}{S} \right) \right]$$

$Durchschnitt1 = 3.367$

Die **Noten** sind hier die Zufallsgrößen

Anzahl/S
ist hier die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Note zu erhalten,

z. B. P(Note 1) = 3/30 = 0,1.

5) Varianz und Standardabweichung

Für den **Erwartungswert** gilt bekanntlich: $\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{N} \left(x_i \cdot P\left(x_i\right)\right)$

Im Folgenden: $P\left(x_i\right) = p_i$

Die Varianz einer Zufallsgröße X ist ein Maß für die **Streuung der Zufallsgröße X** um den Erwartungswert E(X) = μ.

- Berechnet wird zunächst der quadrierte Abstand der Zufallsgröße X_i vom Erwartungswert μ: $\mathbf{(X - \mu)^2}$
- Dieser Abstand wird noch mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Zufallsgröße X_i multipliziert (gewichtet): $\mathbf{(X - \mu)^2 * P(x_i)}$
- Zum Schluß werden alle diese Werte aufaddiert.

Die **Varianz** errechnet sich somit wie folgt: $Var(x) = \sum_{i} \left[\left(x_i - \mu\right)^2 \cdot P\left(x_i\right)\right]$

Die Varianz kann somit auch als Erwartungswert der neuen Zufallsgröße $\mathbf{Y = (X - \mu)^2}$ aufgefasst werden.

$$Var(X) = E\left[\left(X - \mu\right)^2\right]$$

Für die **Standardabweichung** gilt: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Herleitung der Verschiebungsformel

$$\mathrm{Var}(x) = \sum_i \left[(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i) \right]$$

$$\mathrm{Var}(x) = \sum_i \left[\left[(x_i)^2 - 2 \cdot \mu \cdot x_i + \mu^2 \right] \cdot P(x_i) \right]$$

$$\mathrm{Var}(x) = \sum_i \left[(x_i)^2 \cdot P(x_i) \right] - \sum_i \left[(2 \cdot \mu \cdot x_i) \cdot P(x_i) \right] + \sum_i \left(\mu^2 \cdot P(x_i) \right)$$

$$\mathrm{Var}(x) = E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot \left[\sum_i \left(x_i \cdot P(x_i) \right) \right] + \mu^2 \cdot \left(\sum_i P(x_i) \right)$$

$$\mathrm{Var}(x) = E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot \mu + \mu^2$$

oder

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Verschiebungsformel zur Berechnung der Varianz

1. Beispiel: "1. Dutzend beim Roulett"

Zufallsgröße X beschreibt den Reingewinn

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

$$p := \begin{pmatrix} \frac{12}{37} \\ \frac{25}{37} \end{pmatrix}$$

$N := \text{länge}(x) - 1$

$N = 1$

Erwartungswert

$$\mu := \sum_{i=0}^{N} \left(x_i \cdot p_i\right)$$

$\mu = -0.027$

Varianz

$$\text{Var}(x) := \sum_{i=0}^{N} \left[\left(x_i - \mu\right)^2 \cdot p_i\right]$$

$\text{Var}(x) = 1.972$

Standardabweichung

$\sigma(x) := \sqrt{\text{Var}(x)}$

$\sigma(x) = 1.404$

Eine häufige Frage lautet:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsgröße X Werte in einer σ-Umgebung des Erwartungswertes μ an. Die mathematische Übersetzung lautet:

$$P\left(\left|X - \mu\right| < \sigma\right) = P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right)$$

$\mu - \sigma(x) = -1.431$ $\mu + \sigma(x) = 1.377$

$i := 0 .. N$

$$PP_i := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(x_i < \mu - \sigma(x)\right) \vee \left(x_i > \mu + \sigma(x)\right) \\ p_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$PP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.676 \end{pmatrix}$$

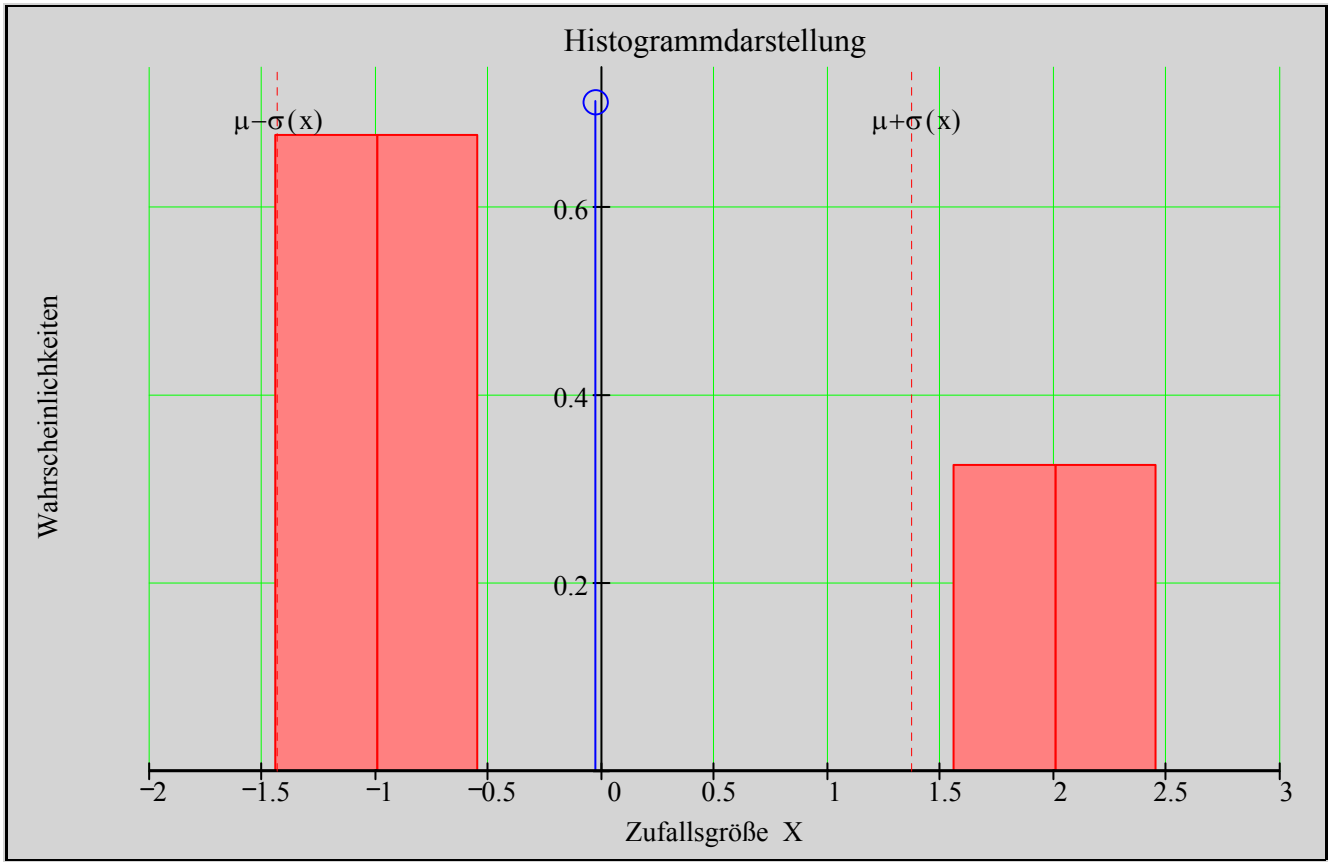
$$P_{1\sigma} = P\left(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma\right)$$

$$P_{1\sigma} := \sum_{i} PP_i$$

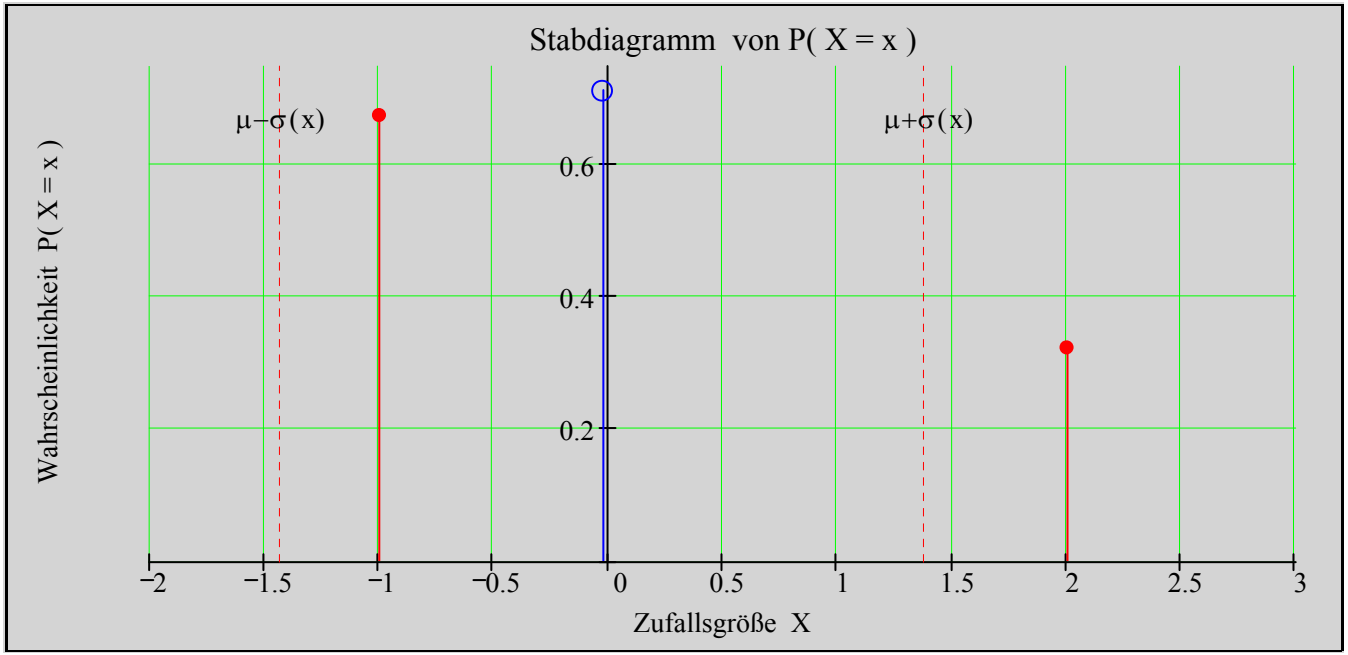
$P_{1\sigma} = 0.676$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{1\sigma} \cdot 100 = 67.568$ % liegen die Werte dieser Zufalsgröße X in einer einfachen Standardumgebung des Erwartungswertes.

Programm für Histogramm



Wie man deutlich sieht, liegt innerhalb einer einfachen Standardabweichung vom Erwartungswert nur die Zufallsgröße X = -1, die den Verlust des Einsatzes beschreibt. Die Wahrscheinlichkeit $P_{1\sigma} = 0.676$ stimmt deshalb auch mit der Verlustwahrscheinlichkeit überein.


Stabdiagramm von P(X = x)
μ−σ(x)
μ+σ(x)
0.6
0.4
0.2
Wahrscheinlichkeit P(X = x)
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Zufallsgröße X

2. Beispiel: "Setzen auf genau eine Zahl beim Roulett"

Setzt ein Spieler beim Roulett-Spiel auf genau eine Zahl, z. B. die Zahl 7, so erhält er bei Erscheinen dieser Zahl den 36-fachen Einsatz ausbezahlt, d. h. der Reingewinn ist der 35-fache Einsatz.

Zufallsgröße X beschreibt den Reingewinn

$$x := \begin{pmatrix} 35 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X

$$p := \begin{pmatrix} \frac{1}{37} \\ \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

$N := \text{länge}(x) - 1$

$N = 1$

Erwartungswert

$$\mu := \sum_{i=0}^{N} \left(x_i \cdot p_i\right)$$

$\mu = -0.027$

Varianz

$$\text{Var}(x) := \sum_{i=0}^{N} \left[\left(x_i - \mu\right)^2 \cdot p_i\right]$$

$\text{Var}(x) = 34.08$

Standardabweichung

$\sigma(x) := \sqrt{\text{Var}(x)}$

$\sigma(x) = 5.838$

Eine häufige Frage lautet:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsgröße X Werte in einer σ-Umgebung des Erwartungswertes μ an. Die mathematische Übersetzung lautet:

$$P\left(\left|X - \mu\right| < \sigma\right) = P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right)$$

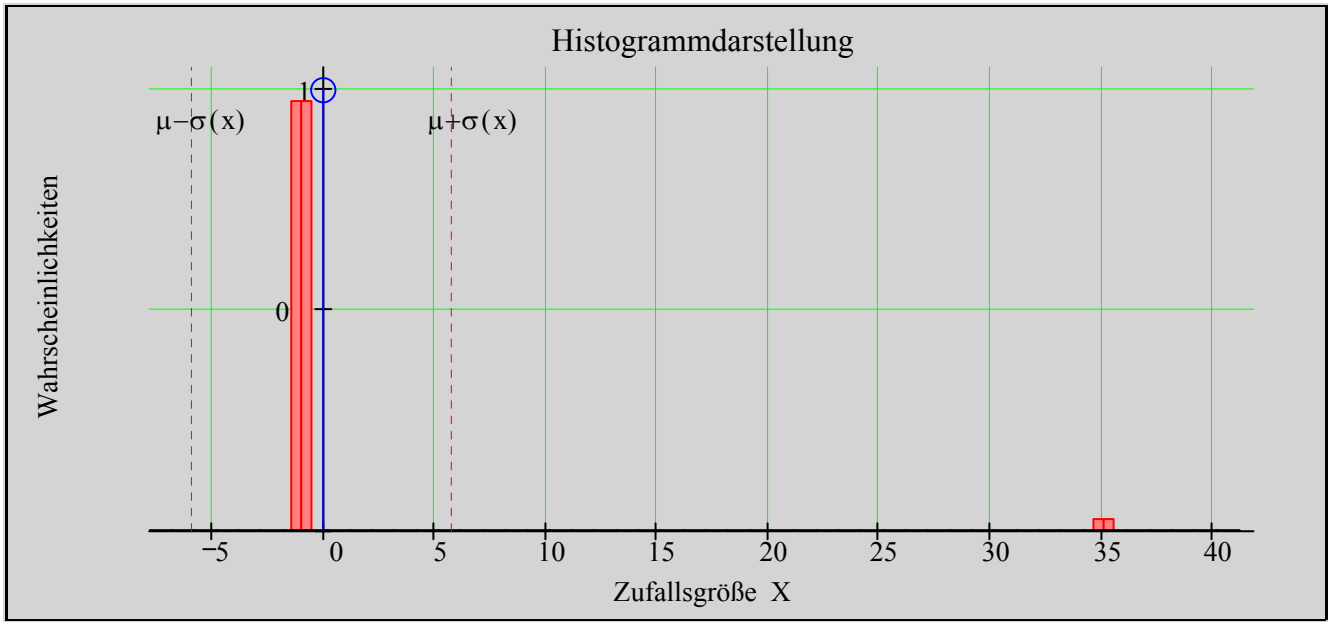
$\mu - \sigma(x) = -5.865$ $\mu + \sigma(x) = 5.811$

$i := 0 .. N$

$$PP_i := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(x_i < \mu - \sigma(x)\right) \vee \left(x_i > \mu + \sigma(x)\right) \\ p_i & \text{otherwise} \end{cases} \qquad PP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.973 \end{pmatrix}$$

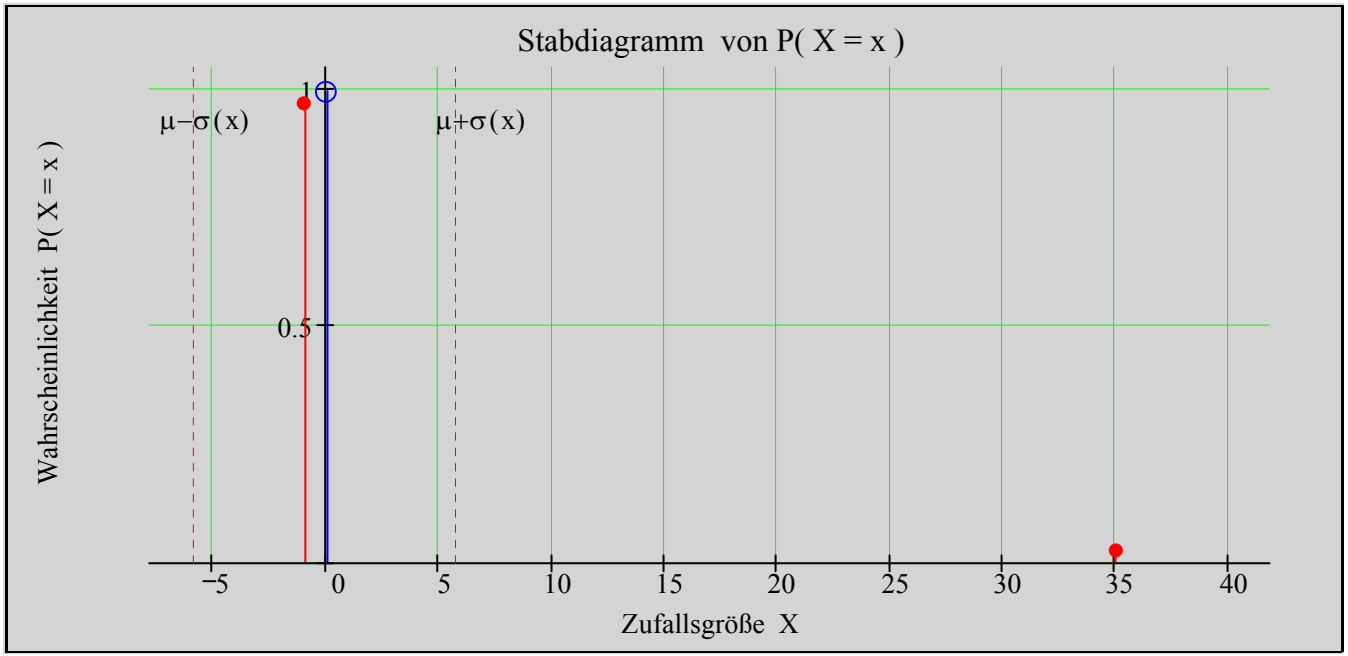
$$P_{1\sigma} = P\left(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma\right) \qquad P_{1\sigma} := \sum_{i=0}^{N} PP_i \qquad P_{1\sigma} = 0.973$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{1\sigma} \cdot 100 = 97.297$ % liegen die Werte dieser Zufalsgröße X in einer einfachen Standardumgebung des Erwartungswertes.



Wie man deutlich sieht, liegt innerhalb einer einfachen Standardabweichung vom Erwartungswert nur die Zufallsgröße X = -1, die den Verlust des Einsatzes beschreibt. Die Wahrscheinlichkeit $P_{1\sigma} = 0.973$ stimmt deshalb auch mit der Verlustwahrscheinlichkeit überein.
Die Zufallsgröße X = 35, die den Gewinn kennzeichnet, ist weit außerhalb der einfachen Standardabweichung vom Erwartungswert.
Beim 1. Beispiel, "Setzen auf 1. Dutzend" ist die Zufallsgröße X = 2 (Gewinn) näher an der einfachen Standardabweichung vom Erwartungswert.
Die Standardabweichung bei "Setzen auf 1. Dutzend" ist auch viel kleiner als beim "Setzen auf genau eine Zahl".

Faustregel:
Eine hohe Varianz und damit eine große Standardabweichung weisen auf ein hohes Spielerrisiko hin.



3. Beispiel

Gegeben sei eine Zufallsgröße **X** die folgende Werte annimmt:

$x := (-5.8 \quad -2.2 \quad 3 \quad 7.6 \quad 9.75 \quad 12.2)^T$ $\qquad N := \text{länge}(x) - 1 \qquad N = 5$

Zu den einzelnen Werten der Zufallsgröße **X** gehören folgende Wahrscheinlichkeiten:

$p := (0.05 \quad 0.30 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.1 \quad 0.20)^T$

Erwartungswert $\qquad \mu := \sum_{i=0}^{N} (x_i \cdot p_i) \qquad \mu = 4.205$

Varianz $\qquad \text{Var}(x) := \sum_{i=0}^{N} \left[(x_i - \mu)^2 \cdot p_i \right] \qquad \text{Var}(x) = 35.19$

Standardabweichung $\qquad \sigma(x) := \sqrt{\text{Var}(x)} \qquad \sigma(x) = 5.932$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt diesmal die Zufallsgröße X Werte in einer σ-Umgebung des Erwartungswertes μ an.
Die mathematische Übersetzung lautet wieder:

$$P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

$\mu + \sigma(x) = 10.137$ $\qquad \mu - \sigma(x) = -1.727$

$i := 0 .. N$

$$PP_i := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(x_i < \mu - \sigma(x)\right) \vee \left(x_i > \mu + \sigma(x)\right) \\ p_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

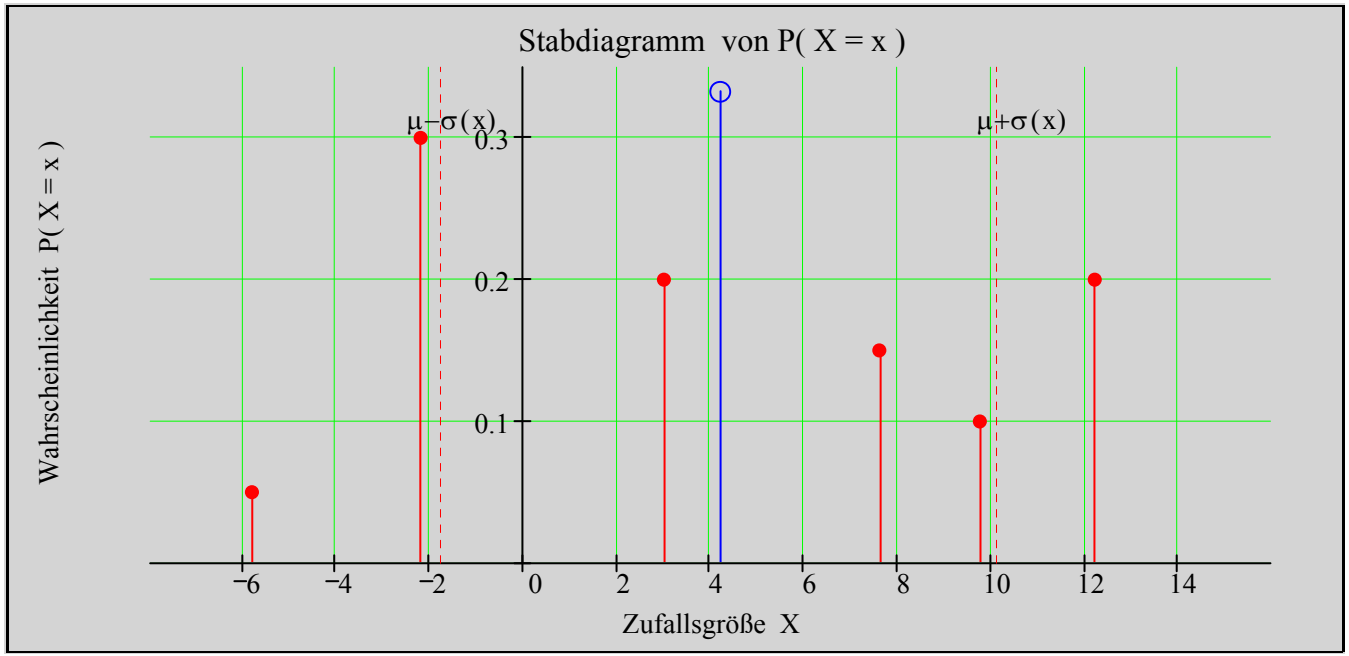
$$PP^T = (0 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.1 \quad 0)$$

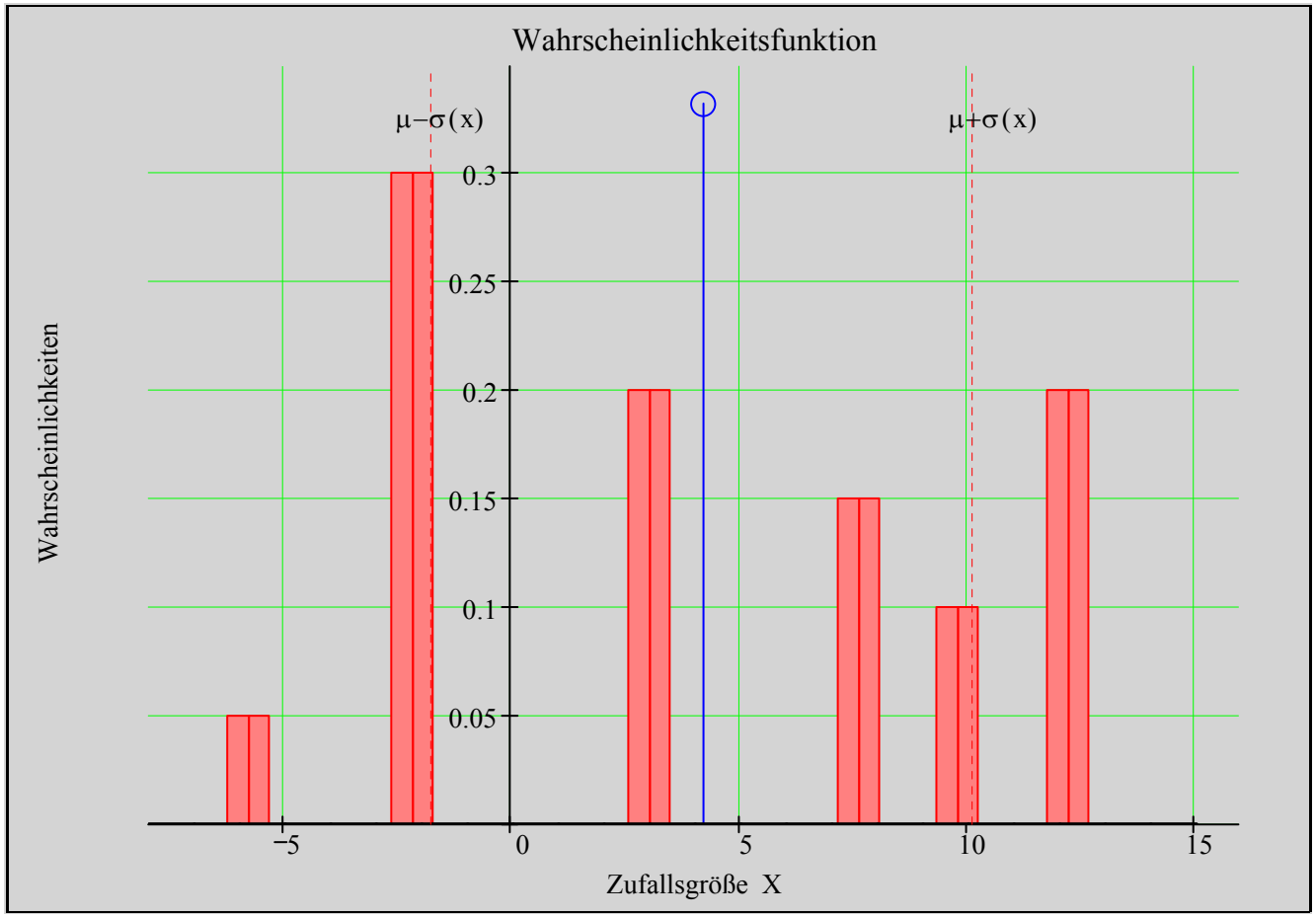
$$P_{1\sigma} = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$$

$$P_{1\sigma} := \sum_{i=0}^{N} PP_i \qquad P_{1\sigma} = 0.45$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{1\sigma} \cdot 100 = 45$ % liegen die Werte dieser Zufalsgröße X in einer einfachen Standardumgebung des Erwartungswertes.

Programm für Histogramme




Wahrscheinlichkeitsfunktion
μ−σ(x)
μ+σ(x)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
Wahrscheinlichkeiten
−5
0
5
10
15
Zufallsgröße X

4. Beispiel: Notenverteilung in einer Klasse

$i := 0 .. 5$

Notenverteilung einer Klasse

$$Noten := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Anzahl := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S := \sum_i Anzahl_i$$

$S = 30$ Klassenstärke

$x := Noten$

$$p := \frac{Anzahl}{S}$$

$x^T = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$

$p^T = (0.067 \quad 0.133 \quad 0.233 \quad 0.267 \quad 0.2 \quad 0.1)$

$N := länge(x) - 1$

Wie oben bereits gezeigt, gilt:

$$Durchschnitt := \sum_i \left[Noten_i \cdot \left(\frac{Anzahl_i}{S} \right) \right]$$

$Durchschnitt = 3.7$

Die **Noten** sind hier die Zufallsgrößen

Anzahl/S
ist hier die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Note zu erhalten,

z. B. P(Note 1) = 3/30 = 0,1.

Der Erwartungswert stimmt selbstverständlich mit dem Notendurchschnitt überein:

Erwartungswert $\mu := \sum_{i=0}^{N} (x_i \cdot p_i)$ $\mu = 3.7$

Die **Varianz** errechnet sich wie folgt: $Var(x) := \sum_{i=0}^{N} \left[(x_i - \mu)^2 \cdot p_i \right]$ $Var(x) = 1.877$

Für die **Standardabweichung** gilt: $\sigma(x) := \sqrt{Var(x)}$ $\sigma(x) = 1.37$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt die Zufallsgröße X Werte in einer σ-Umgebung des Erwartungswertes μ an. Die mathematische Übersetzung lautet:

$P(|X - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$\mu - \sigma(x) = 2.33$ $\mu + \sigma(x) = 5.07$

Die Noten **3, 4 und 5** liegen in diesem Fall in einer Standardumgebung des Erwartungswertes, d. h. des Notendurchschnittes.

$i := 0 .. N$

$$PP_i := \begin{cases} 0 & \text{if } (x_i < \mu - \sigma(x)) \vee (x_i > \mu + \sigma(x)) \\ p_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

$PP^T = (0 \quad 0 \quad 0.233 \quad 0.267 \quad 0.2 \quad 0)$

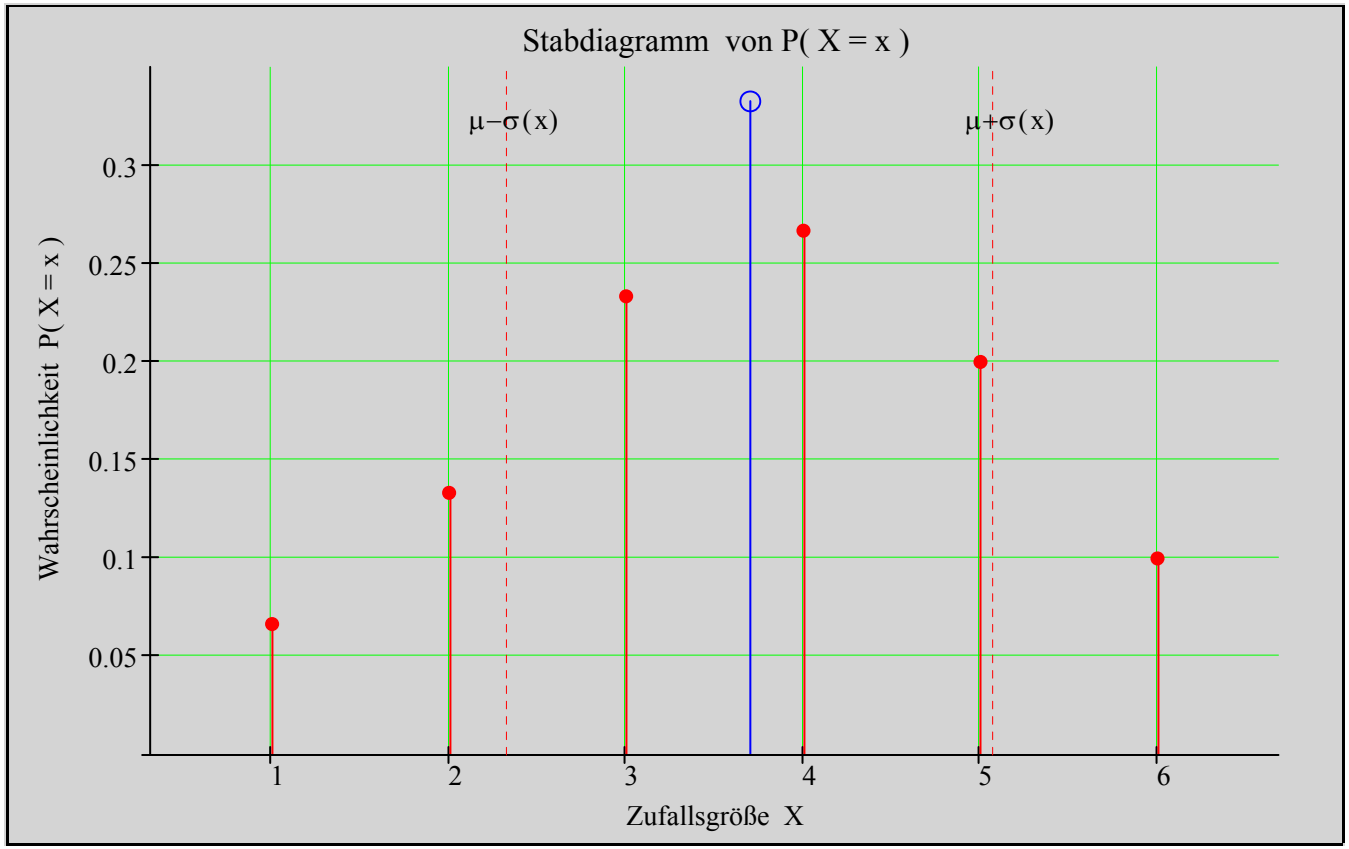
$P_{1\sigma} = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$

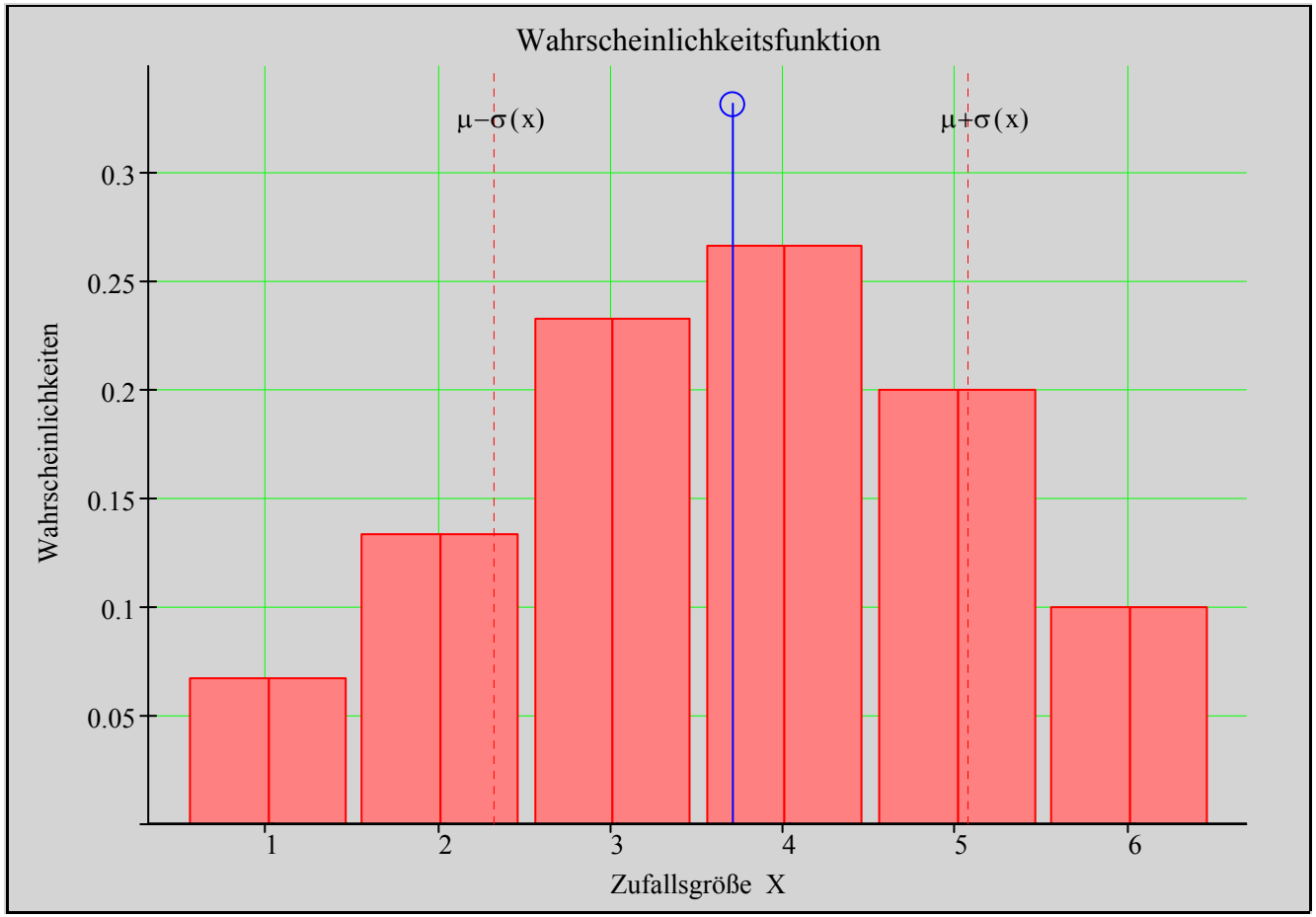
$P_{1\sigma} := \sum_{i=0}^{N} PP_i$ $P_{1\sigma} = 0.7$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{1\sigma} \cdot 100 = 70$ % liegen die Werte dieser Zufalsgröße X in einer

einfachen Standardumgebung des Erwartungswertes.

Programm für Histogramm




Wahrscheinlichkeitsfunktion
μ−σ(x)
μ+σ(x)
Wahrscheinlichkeiten
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
1
2
3
4
5
6
Zufallsgröße X