Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1) Zufallsgröße

Zu jedem Zufallsexperiment gehört ein Ergebnisraum **Ω** . Die einzelnen Ergebnisse ω_i können Buchstaben, Buchstabenkombinationen oder Zahlen sein. Mit Buchstaben oder anderen Symbolen kann man nicht numerisch rechnen. Den einzelnen Ergebnissen des Ergebnissraumes Ω werden deshalb Zahlenwerte zugeordnet, d. h. die Ergebnisse aus Ω werden bewertet. Diese Zuordnung wird durch eine Funktion beschrieben.

Definition
Eine Zufallsgröße X ist eine Funktion, die jedem Ergebnis ω_i eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl x_i zuordnet.

$$X: \Omega \to W \subset \mathbb{R}$$

mit $X(\omega_i) = x_i$ $\qquad D(X) = \Omega$, $\quad W(X) = \{ x_1; x_2; x_3; \ldots ; x_n \} \subset \mathbb{R}$

1. Beispiel: Kartenspiel

Ein Kartenspiel enthält Karten unterschiedlicher Wertigkeit. Zieht man willkürlich eine Karte, so erhält man entweder einen König, eine Dame, usw. .
Alle möglichen Ergebnisse ω werden im Ergebnisraum Ω angegeben:

$$\Omega = \{ \text{Ass, Zehn, König, Dame, Bube, Neun, Acht, Sieben} \} .$$

Bekanntlich wird jede dieser Karten mit Punkten bewertet. Nur so ist ein Kartenspiel überhaupt möglich.
Ein Ass ist 11 Punkte wert, eine Zehn wird mit 10 Punkten bewertet, usw. Diese Zuordnung wird nun durch eine Zufallsgröße **X** wie folgt beschrieben:

$$X(\omega) = \begin{cases} 11, & \text{wenn } \omega \text{ ein Ass ist} \\ 10, & \text{wenn } \omega \text{ eine Zehn ist} \\ 4, & \text{wenn } \omega \text{ ein König ist} \\ 3, & \text{wenn } \omega \text{ eine Dame ist} \\ 2, & \text{wenn } \omega \text{ ein Bube ist} \\ 0, & \text{wenn } \omega \text{ eine andere Karte ist, also eine Neun, Acht oder Sieben} \end{cases}$$

2. Beispiel: Roulette

Beim Roulettespiel kann die Kugel auf einen von 37 Plätzen fallen. Der Ergebnisraum Ω enthält alle Zahlen von 0 bis 36.

$$\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots, 34, 35, 36\} .$$

Ein Spieler setzt auf "**1. Dutzend**".
Für das Ereignis E = {"1. Dutzend"} gilt: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Die Zufallsgröße **X** beschreibe den Reingewinn. Trifft die Kugel eine Zahl zwischen 1 und 12, so wird der dreifache Einsatz ausbezahlt, d. h. der Reingewinn ist nur der doppelte Einsatz. Erscheint eine Zahl außerhalb des 1. Dutzends, so geht der Einsatz verloren. Der "Reingewinn" ist also der Verlust des Einsatzes.
Es gilt:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{if } \omega \in E \\ -1 & \text{if } \omega \notin E \end{cases}$$

2) Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Die Zufallsgröße **X** weist jedem Element aus dem Ergebnisraum **Ω** einen Zahlenwert zu, z. B. der Spielkarte "Ass" die 11 Punkte.
Für den Spieler wichtig ist aber vor allem, mit welcher Wahrscheinlichkeit er nun eine Karte mit dem Spielwert 11 Punkte erhalten wird.
Den Werten der Zufallsgröße **X** wird deshalb die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens zugeordnet.

Beispiel Kartenspiel:
Ein Kartenspiel mit 32 Karten enthält 4 Asse. Die Wahrscheinlichkeit ein Ass zu erhalten beträgt somit 4/32.
Damit gilt aber auch: die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße **X(ω)** den Wert 11 annimmt ist ebenfalls 4/32.

$$P(X(\text{Ass}) = 11) = 4/32$$

Definition
Gegeben seien ein Ergebnisraum **Ω** und eine Zufallsgrösse **X: Ω T W ⊂ IR .**
Die Funktion P, die jedem Element $x_i \in W$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit zuordnet, bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

$$P: W \quad T \quad]0;1[$$
$$\text{mit } P(X = x_i) \quad = \quad p_i$$

1. Beispiel: Kartenspiel:

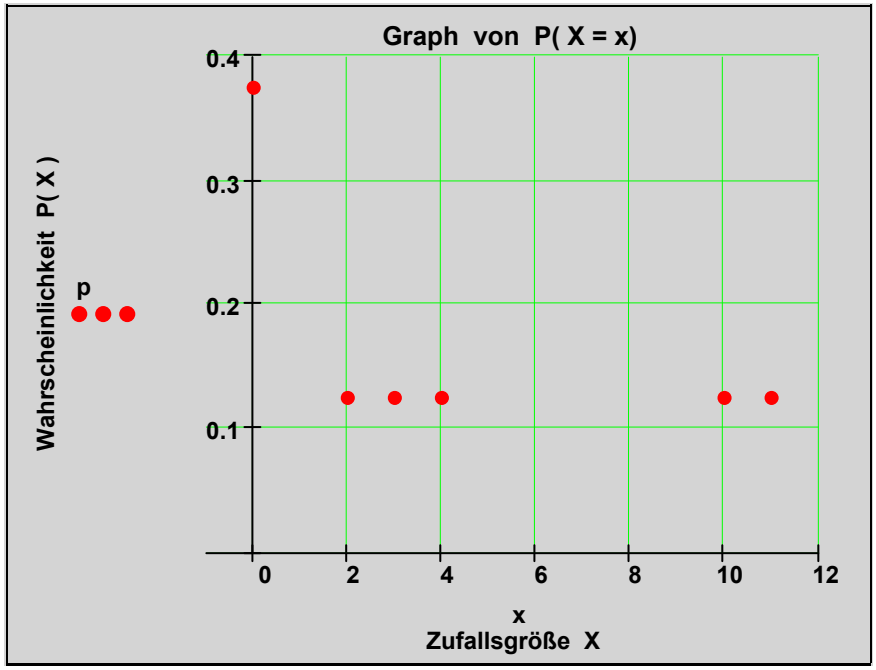
$$\Omega := \begin{pmatrix} \text{"Ass"} \\ \text{"Zehn"} \\ \text{"König"} \\ \text{"Dame"} \\ \text{"Bube"} \\ \text{"Neun, Acht, Sieben"} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zufallsgröße } X} x := \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Wahrscheinlichkeitsverteilung } P} p := \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.125 \\ 0.125 \\ 0.125 \\ 0.125 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

Den Spielkarten wird als mittels der Zufallsgröße **X** ein Punktewert zugeordnet.

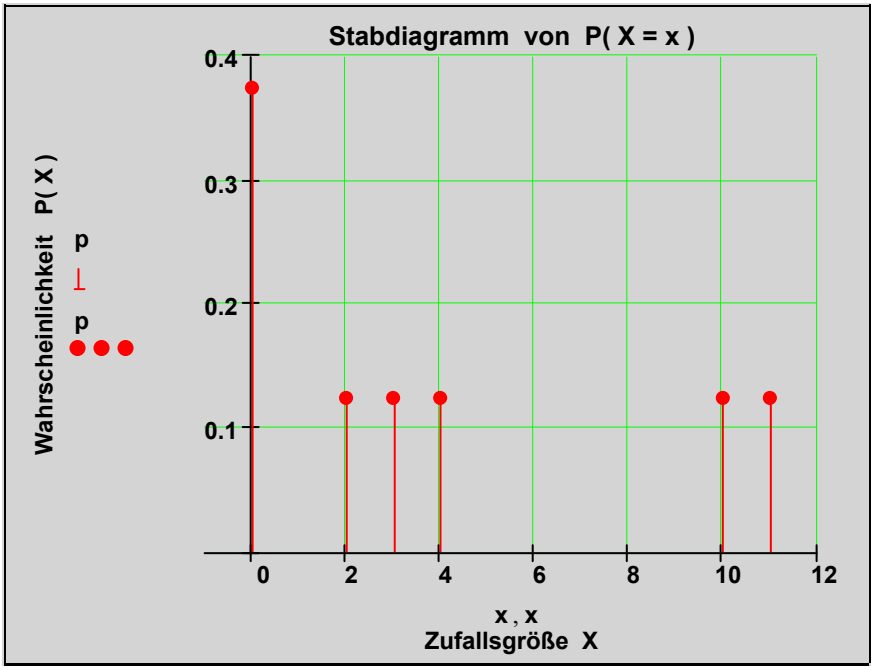
Den Punktewerten wird mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung **P** eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

Graphische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Kartenspiel

a) Graph

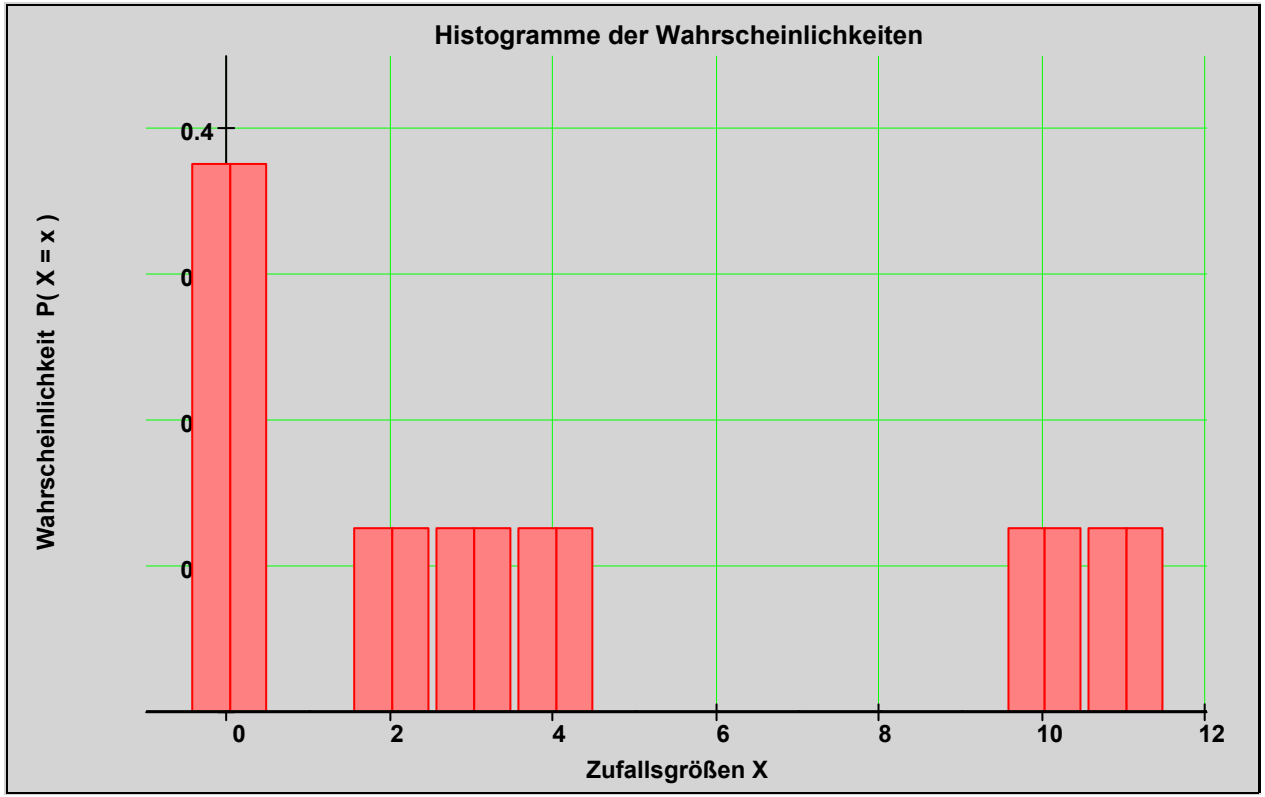


b) Stabdiagramm



c) Histogrammdarstellung

Programm für Histogramm



2. Beispiel: Setzen auf 1. Dutzend beim Roulett

$\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots, 34, 35, 36 \}$.

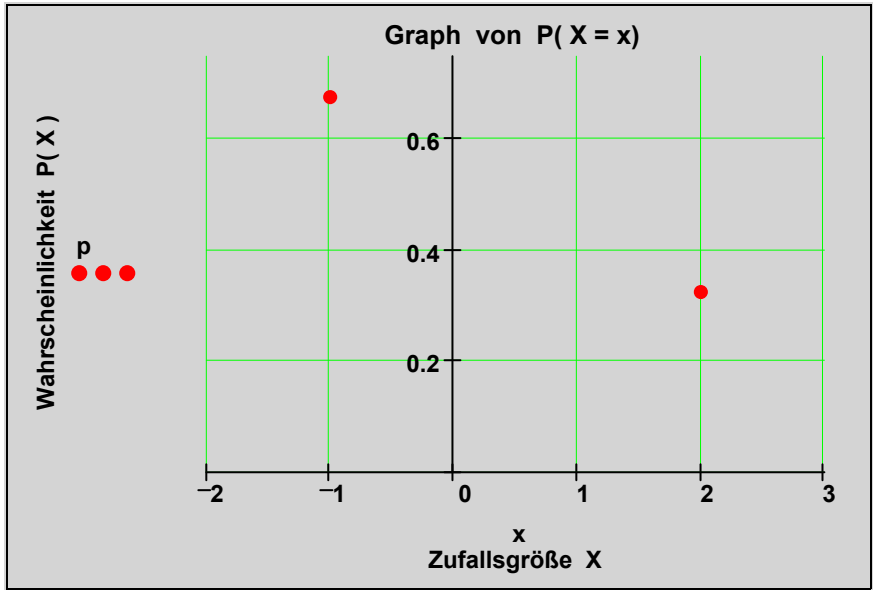
$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} E \\ \overline{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zufallsgröße } X} x := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Wahrscheinlichkeitsverteilung } P} p := \begin{pmatrix} \frac{12}{37} \\ \frac{25}{37} \end{pmatrix}$$

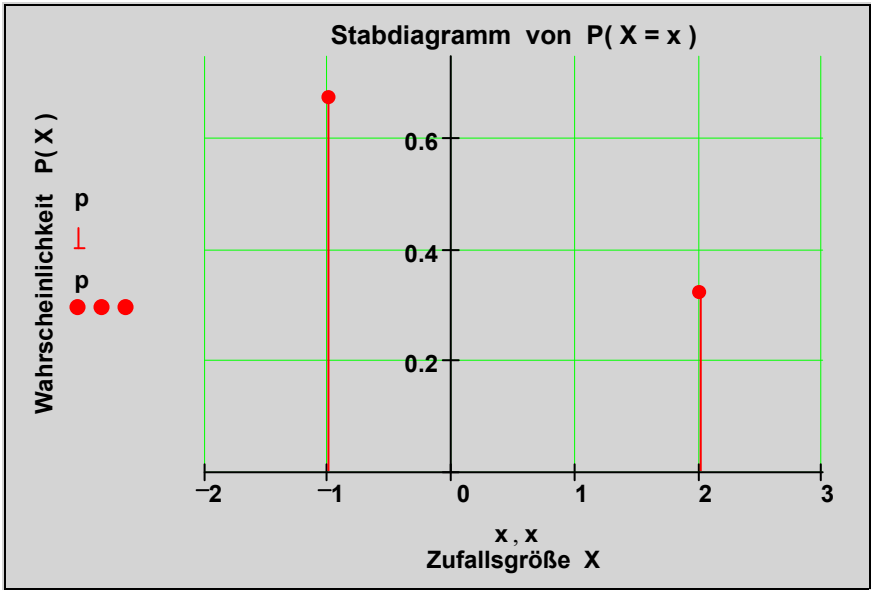
Koordinaten für Graphen

Graphische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung für 1. Dutzend" beim Roulett

a) Graph

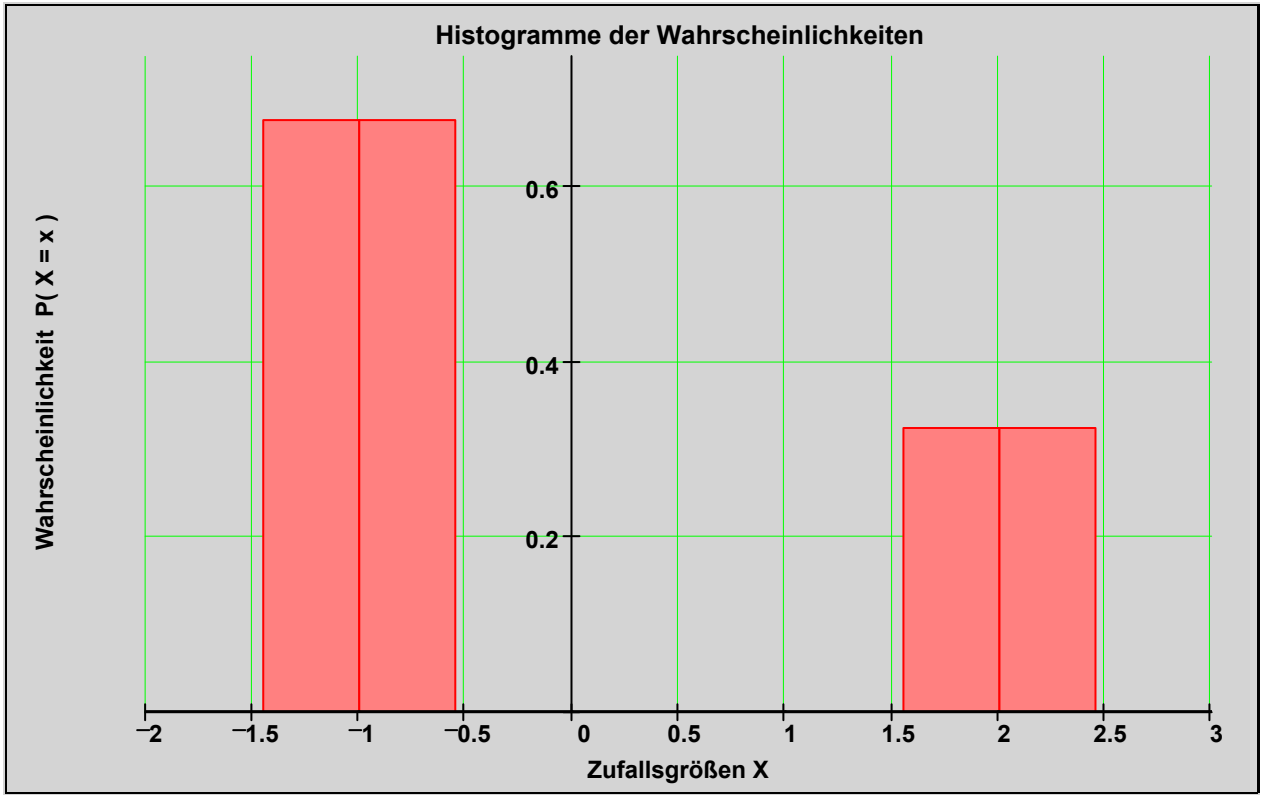


b) Stabdiagramm



c) Histogrammdarstellung

Programm für Histogramm



3. Beispiel: beliebig vorgegebene Zufallsgröße

Gegeben sei eine Zufallsgröße **X** die folgende Werte annimmt:

$$\mathbf{x} := (-5.8 \quad -2.2 \quad 3 \quad 7.6 \quad 9.75 \quad 12.2)^T$$

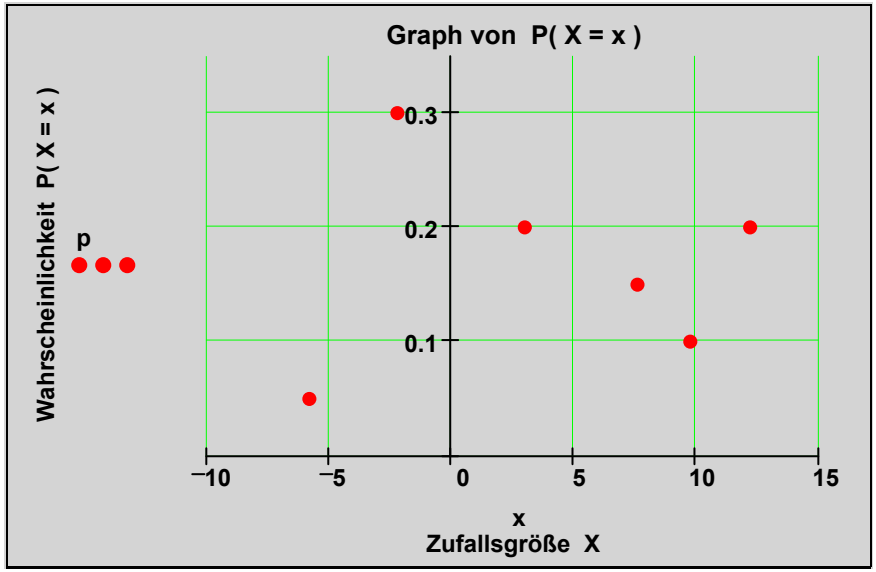
Zu den einzelnen Werten der Zufallsgröße **X** gehören folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{p} := (0.05 \quad 0.30 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.1 \quad 0.20)^T$$

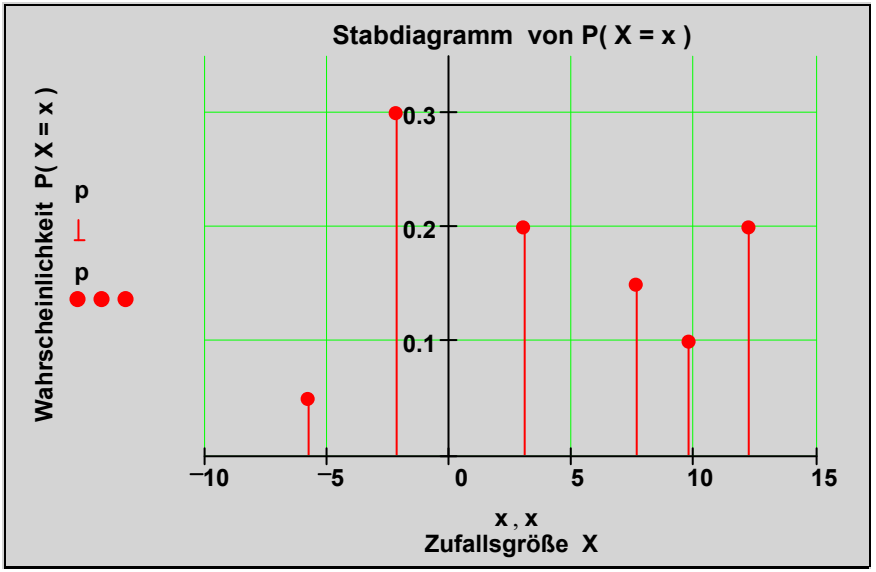
Koordinaten der Diagramme

Graphische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung

a) Graph

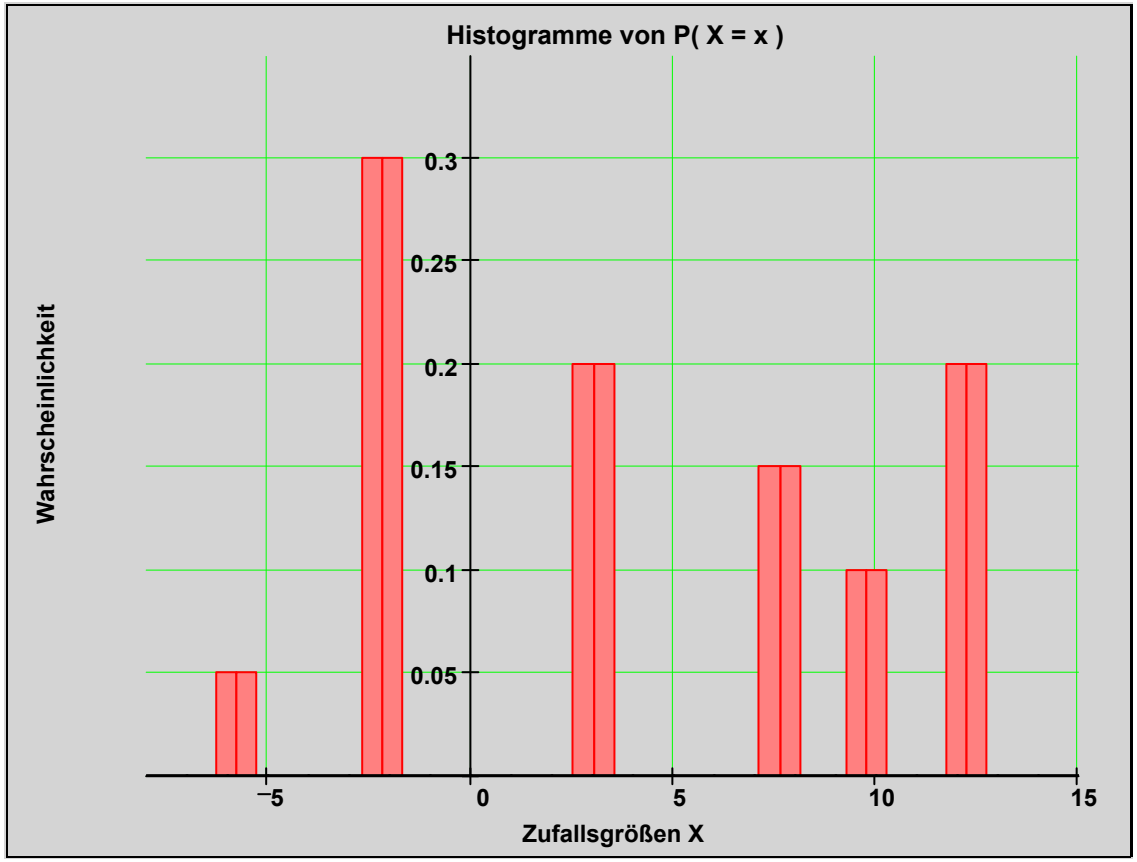


b) Stabdiagramme



c) Histogrammdarstellung

Programm für Histogramm



Wahrscheinlichkeitsfunktion

im Lehrplan der FOS/BOS nicht mehr enthalten

Bei allen bisherigen Graphen handelt es sich um die Darstellung einzelner, isolierter Funktionswerte.
Es werden somit nur endlich viele isolierte Punkte gezeichnet.
Zwischen den einzelnen isolierten Werten der Zufallsgröße X ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solcher Zwischenwert angenommen wird gleich Null.

Beispiel: Beim Kartenspiel nimmt **keine** Karte den Punktewert = 6 an.
Somit folgt: **$P(X = 6) = 0$** .
Diese Tatsache wird bei folgender Definition einer neuen Funktion berücksichtigt.

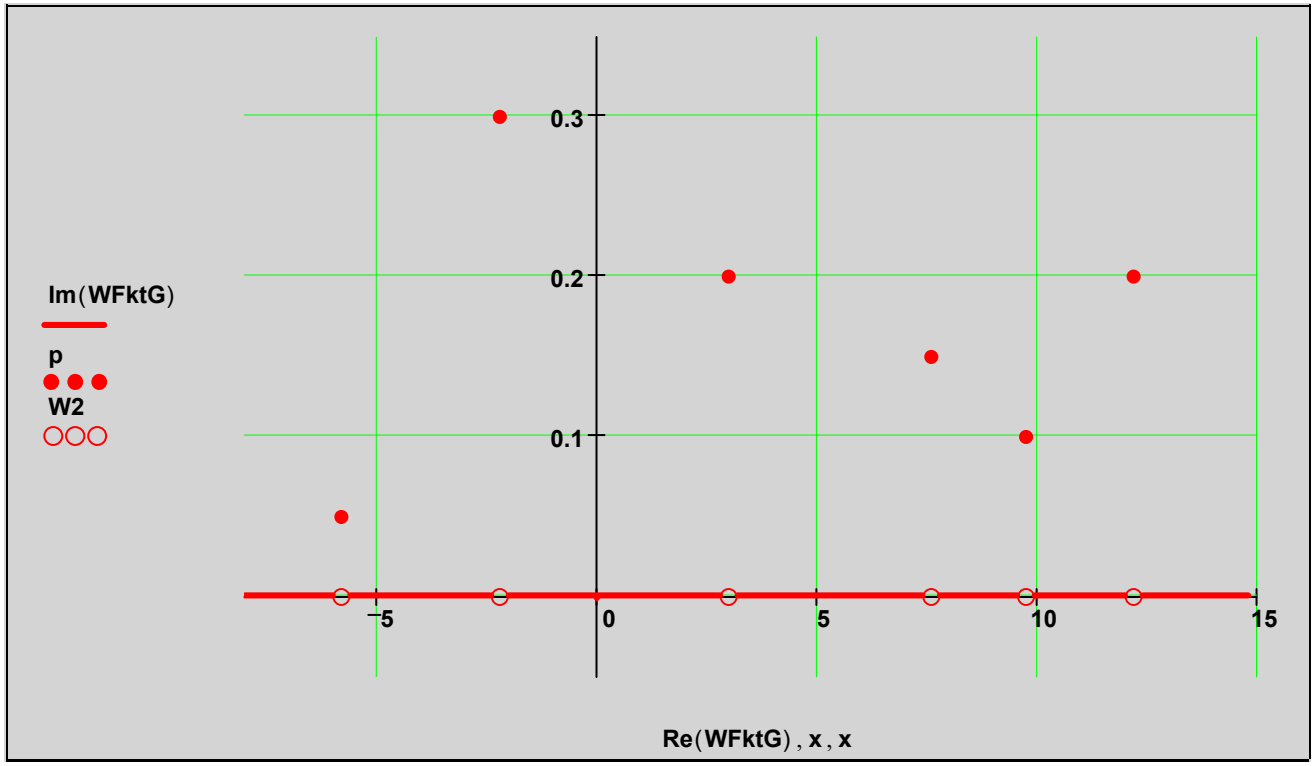
Definition:
Die folgende auf IR definierte Funktion f wird **Wahrscheinlichkeitsfunktion** genannt:

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{if } X = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

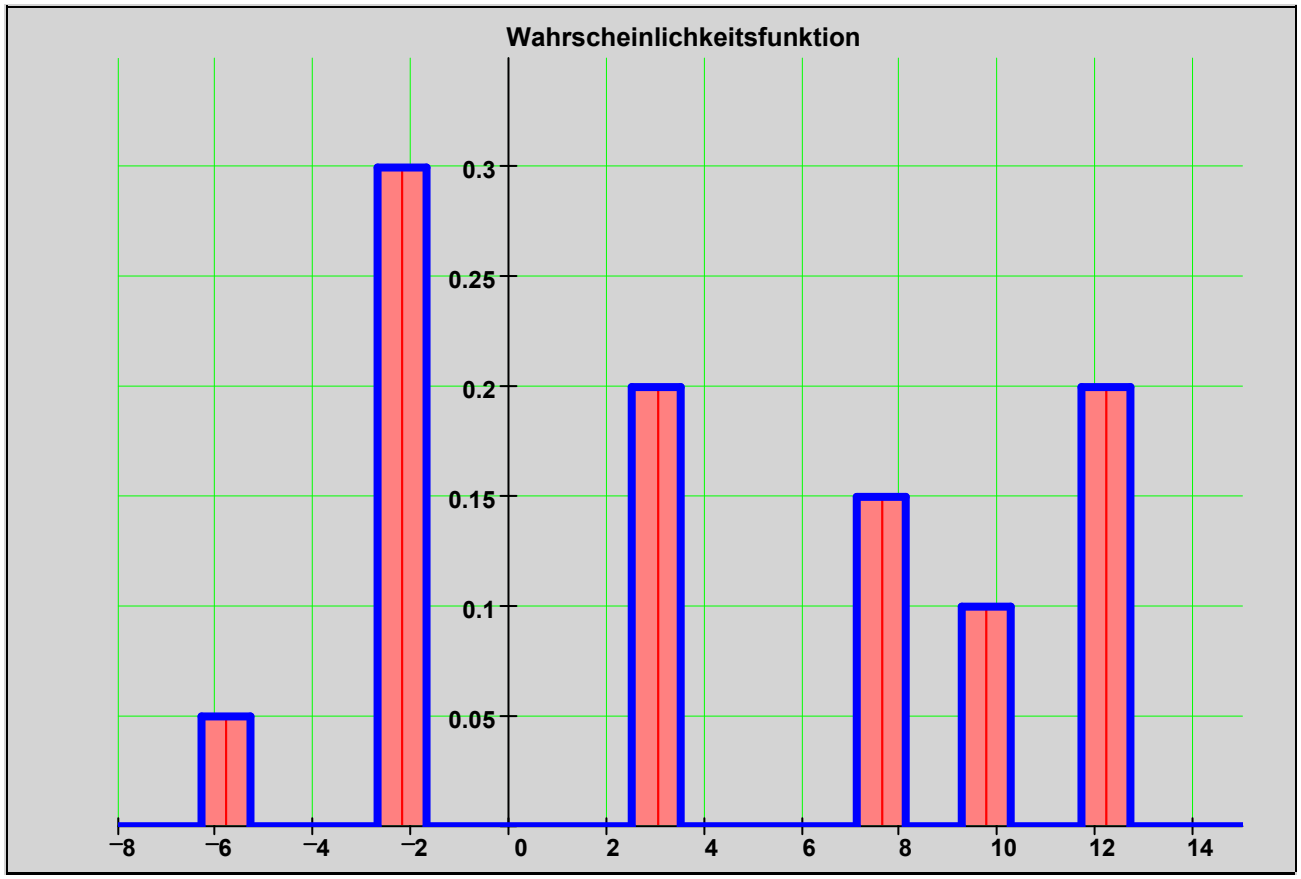
Es gilt: **$D(f) = IR$, $W(f) \subset [0;1]$**

Prog. Wahrscheinlichkeitsfunkt

Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion



Histogramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion



_____ENDE_____Sc_____